Colle 1 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse, et dans le cas où celle-ci est fausse, proposer une rectification possible pour que cela soit vrai.

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

Exercice 1 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ? La réduire.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotente. On note q l'indice de nilpotence de f, défini par $q = \inf\{p \in \mathbb{N}^*, f^p = 0\}$.

a) Montrer que la suite $(\mathrm{Im} f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ décroît strictement jusqu'à $p = q$ puis devient stationnaire.

b) En déduire que $q \leq n$.

Colle 2 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse, et dans le cas où celle-ci est fausse, proposer une rectification possible pour que cela soit vrai.

Si le polynôme caractéristique d'une matrice A est scindé, alors A est diagonalisable.

Exercice 1 :

On considère désormais la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ? La réduire.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note Γ_f le s.e.v de $\mathcal{L}(E)$, défini par $\Gamma_f = \{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$, appelé commutant de f.

a) Si f est diagonalisable, déterminer $\dim\Gamma_f$.

b) Si en plus d'être diagonalisable, f possède des valeurs propres toutes distinctes, montrer que $\Gamma_f = \{P(f), P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Colle 3 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse, et dans le cas où celle-ci est fausse, proposer une rectification possible pour que cela soit vrai.

Une matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A à racines simples.

Exercice 1 :

On considère désormais la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ? La réduire.

Exercice 2 :

a) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle trigonalisable ? Que dire pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

b) Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall p \in \{1, ..., n\}$, $\mathrm{tr}(f^p) = 0$. Montrer que f est nilpotente.

Colle 4 MP1

Exercice 1 :

a) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est nilpotente.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^p pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 :

Démontrer le résultat de cours suivant : Une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Colle 5 — MP1

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \mathcal{C}_1^1 & \mathcal{C}_2^1 & \cdots & \mathcal{C}_n^1 \\ \vdots & \ddots & \mathcal{C}_2^2 & \cdots & \mathcal{C}_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathcal{C}_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

où $\mathcal{C}_n^k$ désigne le nombre de combinaison de k parmi n. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient f et g sont deux endomorphismes de E trigonalisables et qui commutent.

a) Montrer que f et g ont un vecteur propre commun. (On pourra admettre le résultat suivant : "Un endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$").

b) Montrer alors qu'il existe une base de trigonalisation commune de f et g (on dit alors que f et g sont cotrigonalisables).

Colle 6 MP1

Exercice 1 :

1/ a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente (c'est à dire telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0$) d'indice de nilpotence q (c'est le plus petit entier naturel vérifiant $N^q = 0$). Montrer que $I_n - N$ est inversible et donner son inverse.

b) (Application). Monter l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

2/ a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice 2. Calculer $(I_n + N)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

b) (Application). Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer M^{100}.

Exercice 2 : (Lemme des noyaux)

Démontrer le résultat suivant :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et P et Q, deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, premiers entre eux. Alors $\mathrm{Ker}(PQ)(f) = \mathrm{Ker}P(f) \oplus \mathrm{Ker}Q(f)$.

Colle 7 MP1

Exercice 1 :

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle on suppose que toutes ses valeurs propres sont strictement positives. On fait l'hypothèse supplémentaire que toutes les valeurs propres sont distinctes. Montrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$.

Remarque : On a en fait un énoncé plus spécifique : $\forall S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$.

Exercice 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $(A - \lambda I_3)^3 = 0$ et $(A - \lambda I_3)^2 \neq 0$. Montrer que A semblable à la matrice triangulaire supérieure : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^2 = 0$?

Exercice 4 :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour que M et $2M$ soient semblables.