Colle 1 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.

Exercice 1 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser. Calculer ensuite A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, montrer alors que tout sous-espace propre de f est stable par g.

b) Soit désormais $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux. Si les f_i sont diagonalisables, montrer que l'on peut les codiagonaliser, c'est à dire tous les diagonaliser dans une même base.

Colle 2 — MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Si λ est valeur propre de A, on a toujours, $1 \leq \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)) \leq m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ dans χ_A, le polynôme caractéristique de la matrice A.

Exercice 1 :

On considère désormais la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser. Calculer ensuite A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u et v commutent.

a) Montrer que si le corps de base est celui des nombres complexes, alors ils ont au moins un vecteur propre commun.

b) Montrer que si u et v sont diagonalisables alors il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v.

c) Soit désormais p un projecteur de E et $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & p \circ f - f \circ p \end{array} \right.$. Montrer que Δ est diagonalisable.

Colle 3 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Si le polynôme caractéristique d'une matrice A est scindé, alors A est diagonalisable.

Exercice 1 :

On considère désormais la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser. Calculer ensuite A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

a) On rappelle que pour $f \in \mathcal{L}(E)$, une partie $A \subset E$ est dite stable par f si $f(A) \subset A$. Soient f et g deux endomorphismes qui commutent. Montrer alors que tout sous-espace propre de f est stable par g (en particulier $\mathrm{Ker} f$). Montrer de plus que $\mathrm{Im} f$ stable par g.

b) Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $Q \subset \mathcal{L}(E)$ irréductible, c'est à dire que les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E. Montrer que les seuls éléments commutant avec tous les éléments de Q sont les homothéties.

c) Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, montrer que le résultat est faux dans le cas général. Quand peut-on dire qu'il est vrai ?

Colle 4 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Exercice 1 :

Diagonaliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

Démontrer le résultat de cours suivant : Une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable (c'est à dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A est triangulaire supérieure) si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Colle 5 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A à racines simples.

Exercice 1 :

Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$, où a et b sont dans $\mathbb{K}$.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient f et g sont deux endomorphismes de E trigonalisables (c'est à dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f (respectivement g) est triangulaire supérieure) et qui commutent.

a) Montrer que f et g ont un vecteur propre commun. (On pourra admettre le résultat suivant : "Un endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$").

b) Montrer alors qu'il existe une base de trigonalisation commune de f et g (on dit alors que f et g sont cotrigonalisables).

Colle 6 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Une matrice A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (matrice circulante). En exprimant A comme polynôme en la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonaliser A.

Exercice 2 : (Lemme des noyaux)

Démontrer le résultat suivant :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et P et Q, deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, premiers entre eux. Alors $\mathrm{Ker}(PQ)(f) = \mathrm{Ker}P(f) \oplus \mathrm{Ker}Q(f)$.

Colle 7 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et si pour toute valeur propre λ on a
$\dim(\mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{Id}_E) = m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ dans χ_f.

Exercice 1 :

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour que la matrice par blocs
$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ soit diagonalisable.

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A - XI_n) = P_A(X)$, où
$P_A(X) = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0)$.

Colle 8 MP1

Question de cours :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres associés à p valeurs propres distinctes de f. Est-il vrai que ces sous-espaces sont en somme directe dans E ?

Exercice 1 :

Soit A une matrice diagonalisable. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Que dire de la réciproque ?

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que f soit diagonalisable. Que peut-on dire lorsque f n'est pas diagonalisable ?

Colle 9 MP1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Démontrer de manière élémentaire qu'il existe toujours un polynôme non nul annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, en déduire que A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 1 :

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$? $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$?

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Peut-on affirmer que tout sous-espace vectoriel F de E stable par u admet un supplémentaire stable par u ?

Colle 10 MP1

Questions :

1) Que dire d'une droite vectorielle stable par un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

2) Que dire d'une matrice qui n'a qu'une seule valeur propre ?

3) Toute matrice symétrique est-elle diagonalisable ?

4) Est-il vrai que toute matrice est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

5) Que dire des sous-espaces propres de A et de $\alpha I_n + A$?

Exercice 1 :

a) Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\mathrm{tr}(M) = 0$ et $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$.

b) On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 :

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}$ telles que $AB = BA$. Si on suppose de plus que B est nilpotente (c'est à dire telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B^n = 0$). Montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.

Exercice 4 :

Soit f une fonction polynômiale bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A) = f(B) \Rightarrow A = B$.