Colle 1 MP1

Exercice 1 :

1) Quel est le domaine de définition D de la fonction S définie par $S(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$, où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$?

2) S est-elle continue sur D ?

3) Étudier $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x)$.

Exercice 2 : Théorème de Dini :

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, montrer que la convergence est uniforme.

Colle 2 MP1

Exercice 1 :

1) Déterminer le domaine de définition D de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$.

2) f est-elle continue (respectivement dérivable) sur D ?

3) Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2 :

Soit (f_n) une suite de fonctions d'un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que toutes les fonctions f_n soient K lipschitziennes. Si (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, monter que la convergence est uniforme.

Colle 3 MP1

Exercice 1 :

1) Étudier le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan nx}{n^2}$.

2) Déterminer l'ensemble des points de D pour lesquels f est continue (respectivement dérivable).

3) Étudier la limite de f' en 0.

Exercice 2 :

Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes (P_n) ?

Colle 4 MP1

Exercice 1 :

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est définie, sur $\mathbb{R}^+$.

2) Étudier la continuité, puis la dérivabilité de f. On fera une étude particulière en 0.

Exercice 2 : Théorème de Dini (deuxième) :

Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, montrer que la convergence est uniforme.

Colle 5 MP1

Exercice 1 :

1) On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$. Déterminer le domaine de définition de f.

2) Étudier les limites de f aux bornes de ce domaine.

Exercice 2 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et F une primitive quelconque de F. On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ par : $f_n = \frac{nx}{2}[F(x + \frac{1}{n}) - F(x - \frac{1}{n})]$. Démontrer que cette suite converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Colle 6 MP1

Exercice 1 :

1) Déterminer le domaine de définition D de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{-x}}{\ln n}$.

2) Prouver que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur D ?

3) Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 :

Soit f_n une suite de fonctions convexes d'un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Montrer que sur tout segment $]\alpha, \beta[\subset]a, b[$, la suite (f_n) converge uniformément vers f. La convergence est-elle uniforme sur $]a, b[$ tout entier ?

Colle 7 — MP1

Exercice 1 :

Peut-on trouver une suite de fonctions intégrables sur un segment, qui converge simplement sur ce segment vers une fonction qui n'est pas intégrable ? Si oui donner un exemple.

Exercice 2 :

1) Donner le domaine de définition et un équivalent quand $t \to 0^+$ des fonctions suivantes : $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1-e^{-tn})$.

2) Étudier la dérivabilité (notamment en 0 à droite) de la fonction $f : x \to \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x}{n(1+n^2x)}\right)$.

Colle 8 — MP1

Exercice 1 :

Peut-on trouver une suite de fonctions intégrables sur le segment $[0,1]$, qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f intégrable sur ce même segment, mais telle que
$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$? Si oui donner un exemple.

Exercice 2 :

Étudier la série $\left(\sum_{n\geq 0} x^\alpha e^{-n^2x}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent quand $x \to 0^+$.

Colle 9 — MP1

Exercice 1 :

Peut-on trouver une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$, qui converge uniformément vers une fonction f intégrable sur I, mais telle que
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$? Si oui donner un exemple.

Exercice 2 :

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) + \frac{x}{n} - \ln(n+x)$.

1) Donner le domaine de définition de la fonction S.

2) Soit $t(x) = \exp(S(x))$. Calculer $\frac{t(x+1)}{t(x)}$.

3) Prouver que S est convexe

4) On pose $\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}t(x)}{x}$, où γ est la constante d'Euler. Calculer $\Gamma(x+1)$.

5) Prouver que $\ln(\Gamma)$ est convexe.

6) Calculer $\Gamma(1), \Gamma(p)$, où $p \in \mathbb{N}^*$. En déduire $S(p)$.

Colle 10 MP1

Questions :

1) Donner un exemple d'une suite de fonction qui converge simplement mais pas uniformément.

2) Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $I \subset \mathbb{R}$ vers f. La fonction f est-elle nécessairement continue ? Si non donner un contre exemple.

3) Énoncer le théorème de la double limite et donner un contre exemple dans le cas où l'une des hypothèses du théorème n'est pas vérifiée.

4) Peut-on trouver une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue, mais dont la convergence n'est pas uniforme ? Si oui donner un exemple.

5) La limite simple d'une suite de fonction bornée est-elle toujours bornée ? Si non donner un contre exemple.

6) Le produit termes à termes de deux suites de fonctions qui convergent uniformément sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ donne-t-il une suite de fonctions qui converge uniformément ? Si non donner un contre exemple.

7) Peut-on trouver une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme une fonction dérivable, avec la suite (f'_n) des fonctions dérivées qui converge vers $g \neq f'$? Si oui donner un exemple.

8) Peut-on trouver une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme une fonction f qui n'est pas dérivable ? Si oui donner un exemple.

9) Peut-on trouver une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme une fonction dérivable, avec la suite (f'_n) des fonctions dérivées qui ne converge pas ? Si oui donner un exemple.

10) Peut-on trouver une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme une fonction f qui n'est dérivable en aucun point ? Si oui donner un exemple.

11) Donner un contre exemple au premier théorème de Dini dans le cas où l'une des hypothèses n'est pas vérifiée.

12) Donner un contre exemple au deuxième théorème de Dini dans le cas où l'une des hypothèses n'est pas vérifiée.

13) Donner un exemple d'une série de fonction qui converge simplement mais pas uniformément.

14) Donner un exemple d'une série de fonction qui converge uniformément mais pas normalement.

15) Peut-on trouver une série de fonctions $\sum g_n$ qui converge simplement mais pas qui ne converge pas uniformément, alors que la suite $(\|g_n\|_\infty)$ converge vers 0 ? Si oui donner un exemple.

16) Peut-on trouver une série de fonctions qui converge absolument mais qui ne converge ni normalement ni uniformément ? Si oui donner un exemple.

17) Peut-on trouver une série de fonctions qui converge uniformément mais qui ne converge pas absolument ? Si oui donner un exemple.

18) Peut-on trouver une série de fonctions qui converge uniformément et absolument mais qui ne converge pas normalement ? Si oui donner un exemple.

19) Donner un exemple d'une série de fonctions continues dont la somme est discontinue.

20) Donner un exemple d'une série de fonctions continues dont la somme est discontinue et n'est pas bornée.

21) Donner un exemple d'une série de fonctions $\sum_n f_n$ de somme F sur $[0, +\infty[$ pour laquelle : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.