Colle 1 MP1

Question de cours : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres associés à p valeurs propres distinctes de f. Est-il vrai que ces sous-espaces sont en somme directe dans E ?

Exercice 1 :

Soient A et B deux matrices $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

a) Étudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(nx) \end{array} \right.$, $I = \mathbb{R}, I = [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

b) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur son ensemble de définition, avec

$f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{n+n^3x^2} \end{array} \right.$.

c) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Colle 2 MP1

Question de cours : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère $\lambda_1, ..., \lambda_p$ p valeurs propres distinctes de f et $v_1, ..., v_p$ p vecteurs propres respectifs. Est-il vrai que la famille $(v_1, ..., v_p)$ est libre dans E ?

Exercice 1 :

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $DC = CD$ Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Exercice 2 :

a) Étudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{nx^2 e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2} \end{cases}, I = \mathbb{R}^*, I = \mathbb{R}_+^*, I = [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*.$$

b) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur son ensemble de définition, avec

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \end{cases}.$$

c) Déterminer le domaine de définition D de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{-x}}{\ln n}$. f est-elle continue sur D ?

Colle 3 MP1

Question de cours : Soit A, B deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A-t-on A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 1 :

a) On rappelle que pour $f \in \mathcal{L}(E)$, une partie $A \subset E$ est dite stable par f si $f(A) \subset A$. Soient f et g deux endomorphismes qui commutent. Montrer alors que tout sous-espace propre de f est stable par g (en particulier $\mathrm{Ker} f$). Montrer de plus que $\mathrm{Im} f$ stable par g.

b) Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $Q \subset \mathcal{L}(E)$ irréductible, c'est à dire que les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E. Montrer que les seuls éléments commutant avec tous les éléments de Q sont les homothéties.

Remarque : Le résultat est faux dans le cas général pour un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, sauf en dimension impaire.

Exercice 2 :

a) Étudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où

$$f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{array} \right. , \alpha \in \mathbb{R}^+,\ I = \mathbb{R}^+, I = [a, +\infty[\text{ avec } a > 0.$$

b) Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur son ensemble de définition, avec

$$f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{n(1+nx^2)} \end{array} \right. .$$

c) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan nx}{n^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.