

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A à racines simples.

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Factoriser $P_n = (X + 1)^n - (X - 1)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Calculer ensuite A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Une matrice A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 1 :

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, le polynôme $P_n = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X^2 + \dots + \frac{1}{n!}X^n$ n'a que des racines simples dans \mathbb{C} .

b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, le polynôme $P_n = X^n - X + 1$ n'a que des racines simples dans \mathbb{C} .

Exercice 2 :

On considère désormais la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la

diagonaliser. Résoudre le système linéaire suivant
$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ 3x - 2y = 1 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases} .$$

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Si le polynôme caractéristique d'une matrice A est scindé, alors A est diagonalisable.

Exercice 1 :

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que P n'a que des racines simples dans \mathbb{C} .

Exercice 2 :

On considère désormais la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser. Résoudre le système différentiel suivant :
$$\begin{cases} x' = -8y + 6z \\ y' = -x - 8y + 7z \\ z' = x - 14y + 11z \end{cases} .$$