Colle 1 MP1

Question de cours : Donner la définition d'un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension n.

Exercice 1 : Redémontrer la caractérisation bien connue suivante (on se placera en dimension finie) :

Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non nulle. Alors $\text{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E. Réciproquement, tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exercice 2 : Soit E un espace $\mathbb{K}$ vectoriel (de dimension finie) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) $\varphi_1, ..., \varphi_p \in E^*$ et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$ définie par $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$.

a) On définit, pour toute partie A d'un espace vectoriel E, l'ensemble
$A^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ (c'est un s.e.v de E^* appelé orthogonal de A). Montrer dans notre cadre, $(\text{Im}\varphi)^\perp = \{0\} \Rightarrow \varphi$ surjective.

b) Montrer que φ est surjective si et seulement si les éléments $\varphi_1, ..., \varphi_p$ sont linéairement indépendants.

Colle 2 MP1

Question de cours : Donner la définition du dual algébrique d'un espace vectoriel E de dimension n. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui quelle est sa dimension ?

Exercice 1 : Démontrer la proposition suivante (on se placera en dimension finie) :

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E. Alors l'ensemble $H^\perp$ des formes linéaires sur E qui s'annulent sur H est une droite de E^*.

Remarque : On peut montrer de manière plus générale que si F est un s.e.v de E de codimension finie, alors, $F^\perp$ est un s.e.v de E^* de dimension $\mathrm{codim}_E F$.

Exercice 2 :

a) Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \mathrm{tr}(AX)$.

b) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) contient au moins une matrice inversible.

Colle 3 MP1

Question de cours : Donner la définition d'une base antéduale (on se placera en dimension finie).

Exercice 1 :

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On considère un entier $1 \leq p \leq n$ et p formes linéaires indépendantes $e_1^*, e_2^*, ..., e_p^*$ de noyaux respectifs $H_1, H_2, ..., H_p$. Montrer que : $\cup_{k=1}^{p} H_k \neq E$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère n réels $a_1, ..., a_n$ rangés dans l'ordre croissant suivant $a_1 < ... < a_n$. On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et pour tout $i \in \{1, ..., n\}, L_i(X) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = (L_1, ..., L_n)$ est une base de E.

b) Soit $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ où $\varphi_i : \left\{ \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a_i) \end{array} \right.$. Monter que $\mathcal{B}^*$ est une base de E^*.

c) En déduire qu'il existe une unique suite $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de nombres réels telle que :
$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i)$.