Colle 1 MP1

Question de cours : Énoncer le Théorème du rang.

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel.
a) Soient f et g deux applications linéaires de E dans F. Montrer les inégalités
$\left|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)\right| \leq \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

b) Soient deux endomorphismes $f, g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $fg = 0$ et $f+g$ inversibles. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim E$.

Exercice 2 :

On prend $E = \mathbb{R}^3$. On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec : $e'_1 = (1, -2, 0), e'_2 = (1, -1, 0), e'_3 = (-2, 3, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base, et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On considère désormais la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Colle 2 MP1

Question de cours : Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie, vrai ou faux ?

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.
a) Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
b) Monter que si $p+q$ est un projecteur, $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}q$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$.

Exercice 2 :

On prend $E = \mathbb{R}^3$. On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec : $e'_1 = (1,1,1), e'_2 = (4,3,-2), e'_3 = (2,-3,2)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base, et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On considère désormais la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Colle 3 MP1

Question de cours : Énoncer le Théorème de la base incomplète.

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Monter l'équivalence
$E = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f \iff \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$.
Cette équivalence reste-t-elle vraie en dimension infinie ?

Exercice 2 :

On prend $E = \mathbb{R}^3$. On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec : $e'_1 = (1,1,1), e'_2 = (1,2,3), e'_3 = (2,3,5)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base, et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On considère désormais la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Colle 4 MP1

Question de cours : Donner la définition du groupe linéaire.

Exercice 1 :

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, tels que $E = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 2 :

1) Soit $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k \in \mathbb{R}_m[X]$ avec $a_0 \neq 0$. On suppose que $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et que $P(A) = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

2) On suppose que $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et que $A^n = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et exprimer $(I_n - A)^{-1}$ en fonction de A. En déduire l'expression de $(I_n - PAP^{-1})^{-1}$ pour toute matrice inversible P.

Colle 5 MP1

Question de cours : Donner la définition de deux matrices équivalentes.

Exercice 1 :

Monter que l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels et l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées antisymétriques d'ordre n à coefficients réels sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Donner une base de chacun de ces sous-espaces et rappeler leur dimension.

Exercice 2 :

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^{-1}.

Colle 6 MP1

Question de cours : Donner la définition de deux matrices semblables.

Exercice 1 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0))$ forme une base de E.
a) Montrer que f est bijective.
b) Montrer qu'il existe $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + ... + a_1 f + a_0 Id_E = 0$.

Exercice 2 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout entier $p \geq 1$, calculer M^p.