Colle 1 ECAM 2

**Exercice 1 :**

a) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. La famille suivante
$v_1 = (1, -2, 0), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (-2, 3, 1)$ est-elle une base de $E$ ?

b) On considère $f, g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension 3. On note $\mathcal{B}$ la base canonique, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
L'application $f$ (respectivement $g$, $f \circ g$) est elle inversible ?

c) Le système linéaire suivant $\left\{ \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + y &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned} \right.$ est-il de Cramer ?

d) Donner l'équation du plan vectoriel engendré par les deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2 :**

a) Calculer l'intégrale curviligne suivante : $\displaystyle\int_C \omega$, où $\omega(x, y) = (x - y^3)\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$ et où $(C)$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ parcouru une fois dans le sens direct (trigonométrique).

b) Calculer l'aire du compact $K$ délimité par la boucle droite de la lemniscate de Bernoulli, dont l'équation polaire est $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $\frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $a > 0$.

Colle 2 ECAM 2

**Exercice 1 :**

a) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. La famille suivante
$v_1 = (1,1,1), v_2 = (4,3,-2), v_3 = (2,-3,2)$ est-elle une base de $E$ ?

b) On considère $f, g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension 3. On note $\mathcal{B}$ la base canonique, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. L'application $f$ (respectivement $g$, $f \circ g$) est elle inversible ?

c) Le système linéaire suivant $\left\{ \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 4z &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned} \right.$ est-il de Cramer ?

d) Donner l'équation du plan vectoriel engendré par les deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2 :**

a) Calculer l'intégrale curviligne suivante : $\displaystyle\int_C \omega$, où $\omega(x,y) = (2x+y)y\mathrm{d}x + (x+2y)x\mathrm{d}y$ et où $(C)$ est l'arc paramétré $x = \frac{1+t}{1+t^4}$, $y = \frac{1+t^3}{1+t^4}$, pour $t$ allant de 0 à 1.

b) Calculer l'aire du compact $K$ délimité par la boucle de la strophoïde droite, dont l'équation polaire est $r = -a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$, $\frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $a > 0$.

Colle 3 ECAM 2

**Exercice 1 :**

a) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. La famille suivante
$v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,2,3), v_3 = (2,3,5)$ est-elle une base de $E$ ?

b) On considère $f, g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension 3. On note $\mathcal{B}$ la base canonique, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ -9 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'application $f$ (respectivement $g$, $f \circ g$) est elle inversible ?

c) Le système linéaire suivant $\begin{cases} x + y + 8z = 1 \\ x + y - 4z = 2 \\ x + y + 7z = 3 \end{cases}$ est-il de Cramer ?

d) Donner l'équation du plan vectoriel engendré par les deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2 :**

a) Calculer l'intégrale curviligne suivante : $\displaystyle\int_C \omega$, où $\omega(x,y,z) = z\mathrm{d}x$ et où $(C)$ est l'arc paramétré $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin t \cos t$, $t$ allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

b) Calculer l'aire d'une cardioïde $\mathcal{C}$ d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$, où $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Colle 4 ECAM 2

**Exercice 1 :**

Calculer le déterminant de la matrice de Vandermonde suivante :
$V(a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$, pour $n \geq 2$ et pour tout $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$.

**Exercice 2 :**

a) Calculer l'aire d'une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, où $a, b \in \mathbb{R}^*$.

b) Étudier la forme différentielle $w$ suivante, à deux variables $w(x, y) = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - y\mathrm{d}y$. La forme différentielle $w$ est fermée ? exacte ? Si $w$ est exacte, calculer ses primitives.

Colle 5 ECAM 2

**Exercice 1 :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A - XI_n) = P_A(X)$, où $P_A(X) = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0)$.

**Exercice 2 :**

a) Calculer l'aire de la boucle de l'arc paramétré $x = t^3 - 3t, y = t^4 - 8t^2$, obtenue pour $t$ variant de $-\sqrt{3}$ à $\sqrt{3}$.

b) Étudier la forme différentielle $w$ suivante, à deux variables
$w(x, y) = ((1 + 2xy)\mathrm{d}x + 2y^2\mathrm{d}y)\cos(x^2 + y^2) + ((1 - 2xy)\mathrm{d}y - 2x^2\mathrm{d}x)\sin(x^2 + y^2)$. La forme différentielle $w$ est fermée ? exacte ? Si $w$ est exacte, calculer ses primitives.

Colle 6 ECAM 2

**Exercice 1 :**

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$. On pose $A_n = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $\det A_n$.

**Exercice 2 :**

a) Calculer l'aire intérieure à la courbe donnée en coordonnées polaires par $r = \frac{1}{4+\cos 3\theta}$.

b) Étudier la forme différentielle $w$ suivante, à deux variables $w(x,y) = \frac{1}{(1-x^2)^2+y^4}(2xy^2\mathrm{d}x + 2(1-x^2)y\mathrm{d}y)$. La forme différentielle $w$ est fermée ? exacte ? Si $w$ est exacte, calculer ses primitives.