Colle 1 MP1

Exercice 1 :

a) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t$.

b) Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-2\cos x}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

Étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{1+|\sin t|e^t}$ sur $[0,+\infty[$.

Colle 2 MP1

Exercice 1 :

a) Intégrabilité et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Colle 3 MP1

Exercice 1 :

a) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Colle 4 MP1

Exercice 1 :

a) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

b) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln(\cos(\frac{1}{t}))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin x|^x\,\mathrm{d}x$.

Colle 5 MP1

Exercice 1 :

Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh t - \cos t}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $f(x) = o(\frac{1}{x})$, lorsque $x \to +\infty$.

Colle 6 MP1

Exercice 1 :

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que pour tout nombre réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge.

Colle 7 MP1

Exercice 1 :

Intégrales de Bertrand. Discuter par rapport à α et $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ sur $[2, +\infty[$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que lorsque $x \mapsto +\infty$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = o(\sqrt{x})$ converge.

Colle 8 MP1

Exercice 1 :

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}x$, en fonction de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

Démontrer que pour une fonction f uniformément continue sur $\mathbb{R}_*^+$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow f$ a une limite nulle en $+\infty$.

Colle 9 MP1

Exercice 1 :

a) Soit $a > 1$, montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t$. Prouver que $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{ax} \frac{1 - e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, puis en déduire la valeur de I. En déduire l'existence et la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}$.

b) Étudier l'intégrabilité de $t \mapsto \sqrt{t + \cos t} - \sqrt{t}$ sur $[0, +\infty[$, puis la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t + \cos t} - \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que f^2 et f''^2 soient intégrables sur $[0, +\infty[$. Prouver que ff'' est intégrable sur $[0, +\infty[$ et en déduire que f'^2 l'est aussi.

Colle 10 — MP1

Exercice 1 :

a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Existence et calcul de la limite, lorsque $x \to 0$, de $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, pour $0 < a < b$.

b) Existence et calcul de $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} \left(\int_{x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier son comportement au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

Qustions :

a) Soit f une fonction définie, positive et continue sur $[1, +\infty[$ et telle que $f(x) = o(\frac{1}{n})$, lorsque x tend vers $+\infty$. Alors f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Vrai ou faux ? Si c'est vrai démontrer le, sinon donner un contre exemple.

b) Soit $-\infty < a \leq b \leq +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b[$ à valeurs réelles. Si f est équivalente à en g en b et que g est intégrable, alors f est intégrable. Vrai ou faux ? Si c'est vrai démontrer le, sinon donner un contre exemple.

c) Soit $-\infty < a \leq b \leq +\infty$ et f une fonction positive continue sur $[a, b[$ à valeurs réelles, qui admet une limite L en b. Si b et L sont finis, peut-on conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a, b[$? Donner un contre exemple dans le cas où on ne peut rien dire.

d) Soit $-\infty < a \leq b \leq +\infty$ et f une fonction positive continue sur $[a, b[$ à valeurs réelles, qui admet une limite L en b. Si b est fini et si L est infini, peut-on conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a, b[$? Donner un contre exemple dans le cas où on ne peut rien dire.

e) Soit $-\infty < a \leq b \leq +\infty$ et f une fonction positive continue sur $[a, b[$ à valeurs réelles, qui admet une limite L en b. Si b est infini et si $L \neq 0$, peut-on conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a, b[$? Donner un contre exemple dans le cas où on ne peut rien dire.

f) Soit $-\infty < a \leq b \leq +\infty$ et f une fonction positive continue sur $[a, b[$ à valeurs réelles, qui admet une limite L en b. Si b est infini et si $L = 0$, peut-on conclure quant à l'intégrabilité de f sur $[a, b[$? Donner un contre exemple dans le cas où on ne peut rien dire.

g) Si f est continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors f admet une limite en $+\infty$ et cette limite est nulle. Vrai ou faux ? Si c'est vrai démontrer le, sinon donner un contre exemple.