Colle 1

Exercice 1 :

a) Calculer $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x, 0 \le y, x+y \le 1\}$.

b) Calculer $\iint_D \frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$.

Exercice 2 :

a) Construire l'arc paramétré défini par : $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 5\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) & = & t\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right.$.

b) Étude et tracé de la courbe définie en coordonnées polaires par $\rho(\theta) = \cos(2\theta)$.

Colle 2

Exercice 1 :

a) Calculer $\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \le y \le x\}$.

b) Calculer $\iint_D \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le R^2\}$, et où $(a,b,R) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ fixé.

Exercice 2 :

a) Étude et tracé de la lemniscate de Bernoulli définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) & = & \frac{t^3}{1+t^4} \end{array}\right.$.

b) Étude et tracé de la courbe définie en coordonnées paramétriques par $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & a\cos^3(t) \\ y(t) & = & a\sin^3(t) \end{array}\right.$.

Colle 3

Exercice 1 :

a) Calculer $\iint_D (x^2-y^2)e^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 1, x+y \ge 1, x \ge y\}$.

b) Calculer $\iint_D e^{-(x^2+xy+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+xy+y^2 \le 1\}$.

Exercice 2 :

a) Construire l'arc paramétré défini en coordonnée polaires par : $\rho(\theta) = 1+\cos(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

b) Étude et tracé de la courbe définie en coordonnées paramétriques par $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \sin(t) \\ y(t) & = & \sin(2t) \end{array}\right.$.

Colle 4

Exercice 1 :

a) Calculer $\iint_D x\cos(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x, x^2+y^2 \leq \pi^2\right\}$.

b) Calculer $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

Exercice 2 :

Colle 5

Exercice 1 :

a) Calculer $\iiint_D x^2y^3z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\right\}$.
b) Calculer $\iiint_D xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$.

Exercice 2 :

a) Calculer l'intégrale curviligne suivante : $\displaystyle\int_C \omega$, où $\omega(x,y) = (x-y^3)\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$ et où (C) est le cercle d'équation $x^2+y^2=1$ parcouru une fois dans le sens direct (trigonométrique).

b) Calculer l'aire du compact K délimité par la boucle droite de la lemniscate de Bernoulli, dont l'équation polaire est $r^2 = a^2\cos 2\theta$, $\frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $a > 0$.

Colle 6

Exercice 1 :

a) Calculer $\iiint_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\right\}$.
b) Calculer $\iiint_D |xyz|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leq 2pz, 0 \leq z \leq a\right\}$, où $(a,p) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ fixé.

Exercice 2 :

a) Calculer l'intégrale curviligne suivante : $\displaystyle\int_C \omega$, où $\omega(x,y) = (2x+y)y\mathrm{d}x + (x+2y)x\mathrm{d}y$ et où (C) est l'arc paramétré $x = \frac{1+t}{1+t^4}$, $y = \frac{1+t^3}{1+t^4}$, pour t allant de 0 à 1.

b) Calculer l'aire du compact K délimité par la boucle de la strophoïde droite, dont l'équation polaire est $r = -a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$, $\frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $a > 0$.

Colle 7

Exercice 1 :

a) Calculer $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)e^z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$.

b) Calculer $\iiint_D x^2+y^2+z^2, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leq \lambda^2 z^2, 0 \leq z \leq a\}$, où $(a,p) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ fixé.

Exercice 2 :

a) Calculer l'intégrale curviligne suivante : $\displaystyle\int_C \omega$, où $\omega(x,y,z) = z\mathrm{d}x$ et où (C) est l'arc paramétré $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin t \cos t$, t allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

b) Calculer l'aire d'une cardioïde $\mathcal{C}$ d'équation polaire $r = a(1+\cos\theta)$, où $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Colle 8

Exercice 1 :

Calculer la longueur de l'astroïde : $\begin{cases} x(t) &= a\cos^3(t) \\ y(t) &= a\sin^3(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

Exercice 2 :

a) Calculer l'aire d'une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, où $a, b \in \mathbb{R}^*$.

b) Étudier la forme différentielle w suivante, à deux variables $w(x,y) = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - y\mathrm{d}y$. La forme différentielle w est fermée ? exacte ? Si w est exacte, calculer ses primitives.

Colle 9

Exercice 1 :

Calculer la longueur de la cardioïde : $\rho(\theta) = a(1+\cos(\theta))$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

Exercice 2 :

a) Calculer l'aire de la boucle de l'arc paramétré $x = t^3 - 3t, y = t^4 - 8t^2$, obtenue pour t variant de $-\sqrt{3}$ à $\sqrt{3}$.

b) Étudier la forme différentielle w suivante, à deux variables
$w(x,y) = ((1+2xy)\mathrm{d}x + 2y^2\mathrm{d}y)\cos(x^2+y^2) + ((1-2xy)\mathrm{d}y - 2x^2\mathrm{d}x)\sin(x^2+y^2)$. La forme différentielle w est fermée ? exacte ? Si w est exacte, calculer ses primitives.

Colle 10

Exercice 1 :

a) Calculer la longueur de la courbe paramétrée définie par : $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & 3 - 2\cos(t) - 2\cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) - \sin(2t) \end{array} \right.$, $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 2 :

a) Calculer l'aire intérieure à la courbe donnée en coordonnées polaires par $r = \frac{1}{4+\cos 3\theta}$.

b) Étudier la forme différentielle w suivante, à deux variables $w(x,y) = \frac{1}{(1-x^2)^2+y^4}(2xy^2\mathrm{d}x + 2(1-x^2)y\mathrm{d}y)$. La forme différentielle w est fermée ? exacte ? Si w est exacte, calculer ses primitives.