Colle 1

Exercice 1 :

a) Calculer $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\right\}$.

b) Calculer $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+xy+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+xy+y^2 \leq 1\right\}$.

Exercice 2 :

a) Construire l'arc paramétré défini par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) - \sin(2t) \end{array}\right.$$

et déterminer sa longueur.

b) Étude et tracé de la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$\rho(\theta) = \cos(2\theta),$$

et calculer le rayon de courbure en $\theta = 0$.

Colle 2

Exercice 1 :

a) Calculer $\displaystyle\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y \leq x\right\}$.

b) Dans $\mathbb{R}^2$ on note $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq a^2\}$ le disque de centre O et de rayon $a > 0$, $C_a = [-a,a] \times [-a,a]$ le carré plein de centre O et de côté $2a$. On pose $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

Montrer tout d'abord que :

$$\iint_{D_a} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{C_a} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_{D_{a\sqrt{2}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

En déduire ensuite la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

a) Étude et tracé de la courbe (Astroïde) définie en coordonnées paramétriques par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & a\cos^3(t) \\ y(t) & = & a\sin^3(t) \end{array}\right.$$

et déterminer sa longueur.

b) Étude et tracé de la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$\rho(\theta) = \frac{\theta}{\theta^2 - 1},$$

et calculer le rayon de courbure en $\theta = 0$.

Colle 3

Exercice 1 :

a) Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 1\right\}$.

b) Pour tout $t \leq 0$, on pose

$$F(t) = \iint_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ et } f(t) = \int_0^t e^{ix^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exprimer $F(t)$ de deux manières différentes.

Pour $T > 0$, on pose $I(T) = \frac{1}{T}\displaystyle\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I(T)$ converge lorsque $T \to +\infty$ et calculer sa limité. En déduire ensuite la valeur de l'intégrale de Fresnel $\displaystyle\int_0^t e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

a) Étude et tracé de la courbe (de Lissajous) définie en coordonnées paramétriques par :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= \sin(2t) \end{cases}$$

et calculer le rayon de courbure en $t = \frac{\pi}{2}$.

b) Construire l'arc paramétré défini en coordonnée polaires par :

$$\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$$

et déterminer sa longueur.