Colle 1

Exercice 1 :

a) Calculer $f(x) = \int_1^2 t^x \, \mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) En étudiant la dérivabilité de f, en déduire la valeur de $h(x) = \int_1^2 t^x \ln(t) \, \mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Soit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(xt)^3}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F.

b) Étudier la continuité de la fonction F sur son ensemble de définition.

c) Calculer les limites éventuelles de la fonction F aux bornes de son ensemble de définition.

Colle 2

Exercice 1 :

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

b) Étudier la continuité de la fonction f.

c) Étudier la dérivabilité de la fonction f.

d) En déduire la valeur de f.

Exercice 2 :

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} \, \mathrm{d}t$.

a) Démontrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Démontrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Déterminer la limite de F quand x tend vers $+\infty$.

Colle 3

Exercice 1 :

a) Étudier le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f.

c) Étudier la valeur de f.

Exercice 2 :

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F.

b) Étudier la continuité de F sur son ensemble de définition.

c) Étudier la dérivabilité de F sur son ensemble de définition.

d) Calculer la valeur de F.

Colle 4

Exercice 1 :

Soit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

c) Étudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

d) Calculer des équivalents de f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 2 :

Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier son comportement au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

Colle 5

Exercice 1 :

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour tout entier naturel n, on note $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Déterminer la limite de la suite (I_n).

b) Quelle est la limite de la suite (nI_n) ? En déduire un équivalent de I_n si $f(1) \neq 0$.

c) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+x))^n\,\mathrm{d}x$. Déterminer un équivalent de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 :

Pour tout $t > 0$, on pose

$$I(t) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer un équivalent de $I(t)$ lorsque t tend vers 0^+.

Colle 6

Exercice 1 :

Trouver un équivalent simple de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

Donner un équivalent en $+\infty$ de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Colle 7

Exercice 1 :

a) Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Trouver une relation entre la fonction f et la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 2 :

Donner un équivalent lorsque $t \to +\infty$ de $I(t) = \displaystyle\int_0^1 \cos x e^{it\cosh x}\,\mathrm{d}x$.

Colle 8

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $\hat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Démontrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) On considère maintenant la fonction $f : t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $\hat{f}'$. En déduire la valeur de $\hat{f}$.

Exercice 2 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup +\infty$. Soit f et g deux applications continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs strictement positives.

a) On suppose que g est intégrable sur $[a, b[$. Montrer que la relation $f \underset{x \to b}{\sim} g$ entraîne
$\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

b) On suppose que g n'est pas intégrable sur $[a, b[$. Montrer que la relation $f \underset{x \to b}{\sim} g$ entraîne
$\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Colle 9

Exercice 1 :

Soit la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

a) Démontrer que la fonction Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

b) Démontrer que la fonction Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

c) Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Gamma^k(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

d) En déduire que la fonction Γ est convexe sur $]0,+\infty[$.

e) Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

f) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

g) Démontrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. (On pourra utiliser sans démonstration la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 2 :

On considère le logarithme intégral, qui est l'application définie par

$$\forall x \geq 2,\ \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner un développement asymptotique de $\mathrm{Li}(x)$ à n termes lorsque x tend vers $+\infty$.