Colle 1 ECAM2

Exercice 1 :

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum \ln(1+\frac{1}{n})x^n$.

b) Après avoir donner le rayon de convergence R, sommer la série entière suivante : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^2x^n$.

c) Déterminer le DSE de la fonction suivante : $(\sin x)^2$.

Exercice 2 :

Caractériser l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Colle 2 ECAM2

Exercice 1 :

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum a_nx^n$, où a_n désigne la nième décimale de π.

b) Après avoir donner le rayon de convergence R, sommer la série entière suivante : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{2n+1}$, pour $x > 0$.

c) Après avoir donner le rayon de convergence R, sommer la série entière suivante : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}\cos(n\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Montrer que si F est un sous espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

Colle 3 ECAM2

Exercice 1 :

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum \frac{\text{sh}^3 n}{\text{ch} n}x^n$.

b) Après avoir donner le rayon de convergence R, sommer la série entière suivante : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n(n+2)}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

c) Développer en série entière la fonction suivante : $\ln(1+x+x^2)$.

Exercice 2 :

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a l'égalité ${}^tPP = I_n$ si et seulement si les vecteurs colonnes de P forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Colle 4 ECAM2

Exercice 1 :

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum a_n x^n$, où $a_n = \sin(n\theta),\ \theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

b) Monter que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{\sin x} & x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z} \\ 3 & x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Colle 5 ECAM2

Exercice 1 :

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum \frac{n^3+1}{n+4^n} x^{2n}$.

b) Monter que la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ est développable en série entière en 0, où $\theta \in]0,\pi[$.

Colle 6 ECAM2

Exercice 1 :

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$, avec $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)$.

b) Monter que la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{4x+1}{4x^3-3x+1}$ est développable en série entière en 0.