Colle 1

Exercice 1 :

a) Soient E, F, G des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels normés de dimension finie et $\varphi : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On suppose que φ est continue de sorte qu'il existe $C \geq 0$ telle que $\|\varphi(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\|$ pour tout $(x, y) \in E \times F$. Montrer que φ est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle $d\varphi$.

b) Application : soit E un espace Euclidien réel. Montrer la différentiabilité et calculer la différentielle de l'application produit scalaire $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$.

Exercice 2 :

Étudier les extrema relatifs puis les extrema absolus de la fonction
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Colle 2

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M^3$. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 2 :

Étudier les extrema relatifs puis les extrema absolus de la fonction
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x^3$.

Colle 3

Exercice 1 :

On considère la fonction exponentielle matricielle (on rappelle qu'il s'agit de l'application notée exp définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Montrer que cette application est différentiable en 0 et déterminer sa différentielle en ce point.

Exercice 2 :

Étudier les extrema relatifs puis les extrema absolus de la fonction
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 9y^2 - 6xy - x^2 + 18x - 18y + 1$.

Colle 4

Exercice 1 :

a) On considère la fonction à valeurs réelles f définie sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Cette fonction admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$? Est-elle continue en ce point ?

b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0,y) = y$ est dérivable selon tout vecteur au point $(0,0)$ mais n'est pas continue en ce point.

Exercice 2 :

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme local ?

b) L'application f est-elle un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme global ?

Colle 5

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) Prouver la continuité de f en $(0,0)$.

b) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

c) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en $(0,0)$.

Exercice 2 :

a) Montrer que $\varphi : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $]0,\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Déterminer φ^{-1}.

b) $\varphi : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ réalise-t-il un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme sur $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$. Déterminer φ^{-1} ? Si oui, sur quoi ? Déterminer φ^{-1} dans ce cas.

Colle 6

Exercice 1 :

On considère la fonction à valeurs réelles f définie sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.

b) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

c) Montrer que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$

Exercice 2 :

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle et on se donne $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $\langle \mathrm{d}f_x(h)|h\rangle \geq \alpha\|h\|^2$.

a) Montrer que : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle f(x) - f(y)|x-y\rangle \geq \alpha\|x-y\|^2$.

b) Montrer alors que f réalise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur son image.

Colle 7

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer le gradient de f dans la base polaire.

Exercice 2 :

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application Inv : $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}), M \to M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

b) En calculant les dérivées partielles de Inv au point I_n, calculer la différentielle de Inv au point I_n.

c) En déduire la valeur de la différentielle de Inv en tout point de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

Colle 8

Exercice 1 :

Soit g un champ de vecteur de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{div}(\mathrm{rot} g) = 0$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application déterminant définie par det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \det(M)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle.

Colle 9

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Exprimer le laplacien de f en coordonnées polaires.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'application $\varphi_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^p$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Colle 10

Exercice 1 :

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation suivante : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

Colle 11

Exercice 1 :

Résoudre sur $\Omega =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles : $-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2}$.

Colle 12

Exercice 1 :

Résoudre sur $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles : $x\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$.