Colle 1

Exercice 1 :

a) Soient E, F, G des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels normés de dimension finie et $\varphi : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On suppose que φ est continue de sorte qu'il existe $C \geq 0$ telle que $\|\varphi(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\|$ pour tout $(x, y) \in E \times F$. Montrer que φ est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle $d\varphi$.

b) Application : soit E un espace Euclidien réel. Montrer la différentiabilité et calculer la différentielle de l'application produit scalaire $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique égale à $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire les valeurs de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Colle 2

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M^3$. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 2 :

Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f vérifiant :

$$\forall x \in]0, 2\pi[, f(x) = \frac{\pi - x}{2}, f(0) = 0.$$

En déduire la valeur de : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Colle 3

Exercice 1 :

On considère la fonction exponentielle matricielle (on rappelle qu'il s'agit de l'application notée exp définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\exp(M) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Montrer que cette application est différentiable en 0 et déterminer sa différentielle en ce point.

Exercice 2 :

Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f vérifiant :

$$f \text{ est paire et}, \forall x \in [0, \pi], f(x) = x(\pi - x).$$

En déduire la valeur de : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Colle 4

Exercice 1 :

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application Inv : $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}), M \to M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

b) En calculant les dérivées partielles de Inv au point I_n, calculer la différentielle de Inv au point I_n.

c) En déduire la valeur de la différentielle de Inv en tout point de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :

Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f vérifiant :

$$\forall x \in [0, 2\pi[, f(x) = e^{i\alpha x}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}.$$

En déduire la valeur de : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}$.

Colle 5

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application déterminant définie par det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \det(M)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle.

Exercice 2 :

Soit $a > 0$, développer en série de Fourier la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\cosh a - \cos x}$.

Colle 6

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'application $\varphi_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^p$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 2 :

Développer en série de Fourier la fonction $f : x \mapsto e^{e^{ix}}$.

Colle 7

Exercice 1 :

Soit f une fonction continue, 2π périodique et continue par morceaux. Que peut-on dire de $\lim\limits_{|n|\to+\infty} c_n(f)$? Démontrer le résultat annoncé dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2 :

Soit f une fonction 2π périodique, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t$.
Quelles sont les fonctions f réalisant l'égalité ?

Colle 8

Exercice 1 :

On note $E = \mathbb{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues 2π périodiques à valeurs complexes. Quel produit scalaire considère-t-on usuellement sur cet espace ? Muni de cette structure, est-il complet ? Donner une famille orthonormale relativement au produit scalaire usuel sur E. Comment interprète-t-on la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier ?

Exercice 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire suivante : $y'' + y = |\sin t|$.

Colle 9

Exercice 1 :

On considère le signal 2π périodique défini sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|(\pi - |x|).$$

On a calculé les coefficients de Fourier ce de cette fonction. Ceux-ci figurent dans la liste suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_n = 0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n = \frac{1}{n} & \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} a_n & = & -\frac{2}{n}\left(\frac{(-1)^n+1}{n}\right) \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } a_0 = \frac{\pi^2}{3} \\ b_n & = & 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lll} a_n & = & 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_0 = \frac{\pi^2}{3} \\ b_n & = & -\frac{2}{n}\left(\frac{(-1)^n+1}{n}\right) \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right. .$$

Sans faire de calcul, dites quels sont les coefficients correspondants au signal proposé.

Exercice 2 : (Théorème de Weierstrass dans le cas höldérien)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique. On suppose qu'il existe des réels $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq M|x - y|^\alpha \text{ (on dit que } f \text{ est } \alpha \text{ hölderienne).}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel t, on pose :

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t),\ \text{où} D_k(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \ (K_n \text{ est appelé noyau de Féjer d'indice } n).$$

On note S_n la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de f

1) Monter que $\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z},\ D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$. Que vaut : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t$?

2) Montrer que : $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2(\frac{(n+1)t}{2}}{\sin^2(\frac{t}{2})}$, pour tout t n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [-\pi, -\frac{1}{(n+1)^{1/4}}] \cup [\frac{1}{(n+1)^{1/4}}, \pi], 0 \leq K_n(t) \leq \frac{\pi^2}{\sqrt{n+1}}$.

4) Montrer alors que $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, où $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$.

5) En déduire le théorème de Weierstrass pour les fonctions périodiques dans le cas particulier de la fonction f.