Colle 1 — ECAM2

Exercice 1 :

On considère l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la manière suivante : $M \mapsto \sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}$. Cette application est-elle une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Est-ce une norme euclidienne ?

Exercice 2 :

Soit la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

a) Démontrer que la fonction Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

b) Démontrer que la fonction Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

c) Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Gamma^(k)(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Colle 2 — ECAM2

Exercice 1 :

On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On munit E de l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie pour tout $(f, g) \in E \times E$ par
$\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \,\mathrm{d}t$. Munit de cette structure, E est-il un espace préhilbertien ? Est-ce un espace hermitien ? La famille $(x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est-elle orthonormale ? Est-elle libre ?

Exercice 2 :

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} \,\mathrm{d}t$.

a) Démontrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Démontrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Colle 3 — ECAM2

Exercice 1 :

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a l'égalité ${}^tPP = I_n$ si et seulement si les vecteurs colonnes de P forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 :

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F.

b) Étudier la continuité de F sur son ensemble de définition.

c) Étudier la dérivabilité de F sur son ensemble de définition.

Colle 4 ECAM2

Exercice 1 :

a) Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Trouver une relation entre la fonction f et la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$.

Exercice 2 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée (norme de Schur).

b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme direct est orthogonale.

c) Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, monter que $\mathrm{d}(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|A -^t A\|$. Déterminer de même $\mathrm{d}(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

d) Calculer $\mathrm{d}(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ dans le cas où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Colle 5 — ECAM2

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $\hat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Démontrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) On considère maintenant la fonction $f : t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $\hat{f}'$. En déduire la valeur de $\hat{f}$.

Exercice 2 :

On considère une fonction ρ continue et strictement positive sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on suppose que l'on peut définir un produit scalaire sur E par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_I P(t)Q(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t \text{ pour tout couple}(P, Q) \text{ de polynômes.}$$

On suppose que l'on dispose d'une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonaux pour ce produit scalaire et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\deg P_n = n$.

Le but de cet exercice est de retrouver quelques propriétés usuelles de cette famille.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

b) Prouver que $\langle XP, Q\rangle = \langle P, XQ\rangle$.

c) Établir l'existence de réels a_n, b_n, c_n tels que :

$$XP_n = a_nP_{n+1} + b_nP_n + c_nP_{n-1}.$$

d) Démonter que chaque polynôme P_n est scindé à racines simples dans I.

Colle 6 ECAM2

Exercice 1 :

Donner un équivalent en $+\infty$ de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Soit I un intervalle réel non réduit à un singleton, et $w : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement positive sur I. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n w(x)$ est intégrable sur I. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $x \mapsto f^2(x)w(x)$ est intégrable sur I. On notera que les fonctions polynômes appartiennent à $\mathcal{C}$ d'après l'hypothèse sur w.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel, et que

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

b) Pour cette structure, montrer qu'il existe une unique base (P_n) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, orthonormale pour ce produit scalaire, et vérifiant $\deg P_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que le coefficient dominant γ_n de P_n est positif. (Les P_n sont appelés polynômes orthogonaux associés à la fonction poids w).