Colle 1 ECAM 2

Exercice 1 :

a) On considère E l'ensemble des vecteurs du plan, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orientée dans le sens direct, et u la rotation vectorielle de E d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans le base $\mathcal{B}$ indiquée. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse. Déterminer son rang.

b) On prend $E = \mathbb{R}^3$. On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec : $e'_1 = (1, -2, 0), e'_2 = (1, -1, 0), e'_3 = (-2, 3, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base, et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On considère désormais la matrice $A =\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Calculer $\iiint_D x^2 y^3 z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\big\}$.

Colle 2 ECAM 2

Exercice 1 :

a) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $u : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X], P \to (X^2 - 1)P' - nXP$. Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans le base $\mathcal{B}$ indiquée. Cette matrice est-elle inversible pour $n = 3$? Si oui calculer son inverse. Déterminer son rang.

b) On prend $E = \mathbb{R}^3$. On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec : $e'_1 = (1, 1, 1), e'_2 = (4, 3, -2), e'_3 = (2, -3, 2)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base, et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On considère désormais la matrice $A =\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Calculer $\iiint_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\big\}$.

Colle 3 ECAM 2

Exercice 1 :

a) On considère $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, où $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{kl})_{1\leq k\leq 2, 1\leq l\leq 2})$, et $u : E \mapsto E, M \to M^t$. Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans le base $\mathcal{B}$ indiquée. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse. Déterminer son rang.

b) On prend $E = \mathbb{R}^3$. On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la famille $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$, avec : $e_1' = (1,1,1), e_2' = (1,2,3), e_3' = (2,3,5)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base, et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On considère désormais la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Calculer $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)e^z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\right\}$.

Colle 4 ECAM 2

Exercice 1 :

1) Soit $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k \in \mathbb{R}_m[X]$ avec $a_0 \neq 0$. On suppose que $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et que $P(A) = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

2) On suppose que $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et que $A^n = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et exprimer $(I_n - A)^{-1}$ en fonction de A. En déduire l'expression de $(I_n - PAP^{-1})^{-1}$ pour toute matrice inversible P.

Exercice 2 :

Calculer $\iiint_D xyz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.

Colle 5 ECAM 2

Exercice 1 :

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^{-1}.

Exercice 2 :

Calculer $\iiint_D |xyz| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 2pz, 0 \leq z \leq a\right\}$, où $(a, p) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ fixé.

Colle 6 ECAM 2

Exercice 1 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout entier $p \geq 1$, calculer M^p.

Exercice 2 :

Calculer $\iiint_D x^2 + y^2 + z^2, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq \lambda^2 z^2, 0 \leq z \leq a\right\}$, où $(a, p) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ fixé.