Colle 1 MP1

Question de cours : Énoncer le théorème spécial des séries alternées (TSSA).

Exercice 1 :

a) Nature de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n^\alpha)\right)$, en fonction de α.

b) Déterminer la nature de la série suivante $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ et, dans le cas de convergence, calculer la somme.

Exercice 2 : Démontrer la divergence de la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ et donner un équivalent en $+\infty$.

Colle 2 MP1

Question de cours : Énoncer la règle de d'Alembert. Cette règle permet-elle de conclure quant à la convergence des séries de Riemann ?

Exercice 1 :

a) Nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(2-\sqrt[n]{3})^n$.

b) Déterminer la nature de la série suivante $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+2)}$ et, dans le cas de convergence, calculer la somme.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent du reste de la série de terme général $u_n=\frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha>1$.

Colle 3 MP1

Question de cours : Énoncer le théorème de comparaison avec une intégrale.

Exercice 1 :

a) Nature de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{e^n}{n!}$ et de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{n^n}$.

b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ et, dans le cas de convergence, calculer la somme.

Exercice 2 : Étudier la nature de la série de terme général $u_n=\frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}$, avec $\alpha>0$.

Colle 4 MP1

Question de cours : Citer le théorème de sommation des équivalents (c'est-à-dire le théorème sur les équivalents des sommes partielles et des restes).

Exercice 1 :

a) Nature des séries $\sum e^{-n\sqrt{\ln n}}$ et $\sum \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha})$.

b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et, dans le cas de convergence, calculer la somme.

Exercice 2 : Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$, en fonction de α.

Colle 5 MP1

Question de cours : Nature de la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ en fonction des valeurs de α et β. Redémontrer le cas où $\alpha = \beta = 1$.

Exercice 1 :

a) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{e^n n!}$.

b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln n \ln(n+2)}\right)$?

c) Démontrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$ et calculer sa somme.

Exercice 2 : Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{k=n} \ln^2 k$, où $\alpha > 0$.

Colle 6 MP1

Question de cours : Énoncer la formule de Stirling.

Exercice 1 :

a) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin(2\pi n! e)$.

b) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Exercice 2 : Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\geq 2} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$.

Colle 7 MP1

Question de cours : Énoncer le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Exercice 1 :

a) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, pour $\alpha > 0$.

b) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - \ln n}$.

Exercice 2 : Déterminer la nature du produit infini suivant $\prod_{n \geq 1}(1 - \frac{1}{4n^2})$.

Colle 8 MP1

Question de cours : Dites si l'assertion suivante est vraie ou fausse : Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$, lorsque $n \to +\infty$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature. Si c'est vrai démontrer le, sinon donner un contre exemple et donner une condition suffisante supplémentaire pour que le théorème précédent soit vrai.

Exercice 1 :

a) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.

b) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Exercice 2 : Démontrer le résultat suivant :
(Règle de Raab-Duhamel). Soit $\sum(u_n)$ une série à termes > 0 telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + a/n + \mathcal{O}(1/n^2)}$, lorsque $n \to +\infty$. Alors il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda/n^a$, lorsque $n \to +\infty$.

Remarque : C'est un raffinement de la règle de d'Alembert.

Colle 9 MP1

Question de cours : Dites si l'assertion suivante est vraie ou fausse : Toute série bornée est convergente. Si c'est vrai démontrer le, sinon donner un contre exemple.

Exercice 1 : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln(\cos(\frac{1}{2^n}))$.

Exercice 2 : Démontrer le résultat suivant :
(Théorème d'Abel). Soit $\sum(u_n)$ une série à valeurs réelles. On suppose que pour tout n, $u_n = \alpha_n v_n$ où (α_n) est une suite positive, décroissante et qui tend vers 0 et où la série $\sum v_n$ est bornée. Alors la série $\sum(u_n)$ est convergente.
Appliquer ce résultat pour établir la convergence de la série $\sum \frac{\cos n}{n}$. Cette série est-elle absolument convergente ?

Remarque : En prenant $\alpha_n = a_n$ et $v_n = (-1)^n$, on retrouve le théorème spécial des séries alternées.

Colle 10 MP1

Question de cours : Dites si l'assertion suivante est vraie ou fausse : Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que $u_n = o(\frac{1}{n})$, lorsque $n \to +\infty$. Alors, la série $\sum u_n$ converge. Si c'est vrai démontrer le, sinon donner un contre exemple.

Exercice 1 : Soit u_n une suite à termes réels positifs décroissante. Si la série converge, montrer que $\sum u_n = o(\frac{1}{n})$, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 : Il s'agit de montrer que le produit de Cauchy de deux séries convergentes peut-être divergent si ces deux séries ne sont pas absolument convergentes. On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et on pose : $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}u_k$. Prouver que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.