Colle 1 — MP1

Exercice 1 : Établir la convergence et donner la limite de la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de la suite récurrente (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

Colle 2 — MP1

Exercice 1 : Établir la convergence et donner la limite de la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n}$ $\mathrm{E}(kx)$, $\forall n \geq 1$.

Exercice 2 : Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de la suite récurrente (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Colle 3 — MP1

Exercice 1 : Établir la convergence et donner la limite de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, $\forall n \geq 1$.

Exercice 2 : Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de la suite récurrente (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

Colle 4 — MP1

Exercice 1 : Établir la convergence et donner la limite de la suite définie par $u_n = \prod_{k=1}^{k=n}(1+\frac{k}{n^2})$, $\forall n \geq 1$.

Exercice 2 : Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de la suite récurrente (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Colle 5 — MP1

Exercice 1 : Établir la convergence et donner la limite de la suite définie $\forall n \geq 1$ par $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ pour $0 < u_1 < 1$, et donner une expression fonctionnelle de la suite (u_n).

Exercice 2 : Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de la suite récurrente (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

Colle 6 — MP1

Exercice 1 : Étude de la suite définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1-\sqrt{u_n}}$.

Exercice 2 : Donner un développement asymptotique à deux termes lorsque $n \to +\infty$ de la suite récurrente (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Colle 7 MP1

Exercice 1 : Établir la convergence et donner la limite de la suite (u_n) définie $\forall n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 2 : Donner un développement asymptotique à deux termes lorsque $n \to +\infty$ de la suite récurrente (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Colle 8 MP1

Exercice 1 : Établir la convergence de la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $0 < u_0 < u_1$ et $u_{n+1} = u_n + a^n u_{n-1}$ avec $0 < a < 1$.

Exercice 2 : Donner un développement asymptotique à quatre termes lorsque $n \to +\infty$ de la série harmonique (H_n) définie $\forall n \geq 1$ par $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

Colle 9 MP1

Exercice 1 : Étude de la suite homographique définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{a}{4-u_n}$ pour $a = 3, a = 4$ et $a = 8$.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $n! \sim k\sqrt{n} n^n e^{-n}$ lorsque $n \to +\infty$.

Remarque : On peut calculer la constante k en utilisant une intégrale de Wallis.

Colle 10 MP1

Exercice 1 : Soit u_n une suite définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_0 > 0, u_1 > 0, \lambda > 0$, et $u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n}$. Expliciter le n-ième terme u_n de la suite en fonction de n.

Exercice 2 : Démontrer le résultat suivant :

Lemme (de Cesàro) : Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{k=1}^{k=n} a_k$ tende vers $+\infty$. Si (u_n) est une suite réelle qui tend vers L, alors il en est de même de $v_n = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} a_k u_k}{\sum_{k=1}^{k=n} a_k}$.