Colle 1

Exercice 1 :

Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{\begin{array}{l} x' = -2x + 2y + 2z \\ y' = -10x + 6y + 8z \\ z' = 3x - y - 2z \end{array}\right.$.

Exercice 2 :

Pour tout entier n, on admet l'existence d'un polyôme T_n vérifiant : $\forall t \in [0, \pi]$, $T_n(\cos t) = \cos nt$ $(*)$.

a) En dérivant l'égalité $(*)$, trouver une équation différentielle homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

b) Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq n$. Déduire de la question précédente que :

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

Monter que $T_n^k(-1) = (-1)^{n+k} T_n^k(1)$.

Colle 2

Exercice 1 :

Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{\begin{array}{l} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{array}\right.$.

Exercice 2 :

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

converge et calculer sa limite l.

b) Donner un équivalent de $l - u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

Colle 3

Exercice 1 :

Résoudre le système différentiel suivant : $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, \mathrm{d}x$. Donner une expression explicite de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Colle 4

Exercice 1 : (Étude qualitative)

a) Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + qy = 0$, où q est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que si f est une solution bornée de (E), $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$.

b) Soit a et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que : $a \geq 1$ et $\lim\limits_{+\infty} b = 0$.
Montrer que toute solution de l'équation $(E) : y' + ay = b$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2 : (Prolongement de la dérivée)

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé et $F : [a, b[\to E$ une application continue, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F'(t)$ existe (notée l). Montrer qu'alors F est dérivable en a et que $F'(a) = l$.

Colle 5

Exercice 1 : (Équation d'Euler)

a) Résoudre l'équation $(H) : t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$, en posant $t = \varepsilon e^u$.

b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(E) : t^2 x'' - 2tx' + 2x = t^4 \cos t - 1$.

Exercice 2 : (Calcul du Wronskien)

a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux applications $p, q : I \to \mathbb{C}$ continues. On considère deux solutions u et v de l'équation différentielle $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ (L). Calculer le wronskien de u et v en fonction de sa valeur en un point a de I.

b) On veut étendre ce résultat aux systèmes linéaires. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue. On considère $f_1, ..., f_n$, n solutions sur I de l'équation différentielle $(S) : Y' = A(t)Y$. Calculer le wronskien de $f_1, ..., f_n$ en fonction de sa valeur en un point a de I.

Colle 6

Exercice 1 : (Équation linéaire vectorielle)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue telle que, pour tout $t \in I$, $A(t)$ est une matrice antisymétrique.

a) Montrer que l'équation $X' = A(t)X$ admet des solutions.

b) On suppose que $\exists t_0 \in I,\ X(t_0) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\forall t \in I,\ X(t) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : (Méthode d'Euler)

Soit $T > 0$, $I = [0, T]$, et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que :

$$\exists L > 0, \forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|.$$

On admet l'existence et l'unicité d'une solution $y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec la condition initiale suivante : $y(0) = y_0$. On se propose d'approcher numériquement y par la méthode d'Euler. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et pour tout $n \in \{0, 1, ..., N\}, t_n = nh$. On définit $y_1, ..., y_n$ par récurrence par

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Pour tout $n \in \{0, 1, ..., N\}$, on pose $e_n = y(t_n) - y_n$. On se propose de majorer $\|e_n\|$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, y est de classe $\mathcal{C}^2$, et on pose $M = \sup\{\|y''(t)\|, t \in I\}$.

a) On pose $\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n))$. Montrer que pour tout $n \in \{0, 1, ..., N\}$, $\|\varepsilon_n\| \leq Mh^2/2$.

b) En déduire que $\forall n \in \{0, 1, ..., N\},\ \|e_n\| \leq \frac{Mh}{2L} e^{Lt_n}$.