Colle 1 ECAM2

Exercice 1 :

Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh t - \cos t}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

a) On considère la fonction à valeurs réelles f définie sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Cette fonction admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$? Est-elle continue en ce point ?

b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0,y) = y$ est dérivable selon tout vecteur au point $(0,0)$ mais n'est pas continue en ce point.

Colle 2 ECAM2

Exercice 1 :

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a) Prouver la continuité de f en $(0,0)$.

b) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

c) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en $(0,0)$.

Colle 3 ECAM2

Exercice 1 :

Intégrales de Bertrand. Discuter par rapport à α et $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ sur $[2,+\infty[$.

Exercice 2 :

On considère la fonction à valeurs réelles f définie sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.

b) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

c) Montrer que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$

Colle 4 ECAM2

Exercice 1 :

a) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t$.

b) Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-2\cos x}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$. Cette application est-elle un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme global ?

b) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation suivante : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

Colle 5 ECAM2

Exercice 1 :

a) Intégrabilité et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

a) Montrer que $\varphi : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de $]0,\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Déterminer φ^{-1}.

b) Résoudre sur $\Omega =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles : $-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2}$.

Colle 6 ECAM2

Exercice 1 :

a) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

a) $\varphi : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ réalise-t-il un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme sur $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$. Déterminer φ^{-1} ? Si oui, sur quoi ? Déterminer φ^{-1} dans ce cas.

b) Résoudre sur $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles : $x\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$.