Colle 1

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :

La forme quadratique suivante : $q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto (\mathrm{tr}A)^2$ est-elle non dégénérée ? Déterminer son rang.

Colle 2

Exercice 1 :

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont positives. Montrer de plus que $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

Exercice 2 :

La forme quadratique suivante : $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto xy + yz + zt + tx$ est-elle non dégénérée ? Déterminer son rang.

Colle 3

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp({}^tAA - A^tA) \subset \mathbb{R}^+$. Montrer que ${}^tAA = A^tA$.

Exercice 2 :

Déterminer le rang de la forme quadratique suivante : $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto x^2 - 2y^2 + xy + yz$. Est-elle non dégénérée ?

Colle 4

Exercice 1 :

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^t AA = I_n$?

Exercice 2 : (Une inégalité)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe : $\Delta \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = A^{-1}$.

Vérifier que : $M = \Delta B \Delta \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, puis montrer que : $[\det(I_n + M)]^{\frac{1}{n}} \geq 1 + [\det(M)]^{\frac{1}{n}}$.

En déduire que : $[\det(A + B)]^{\frac{1}{n}} \geq [\det(A)]^{\frac{1}{n}}[\det(B)]^{\frac{1}{n}}$.

Colle 5

Exercice 1 :

Soit $M,\ N \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que $0 \leq \operatorname{tr}(MN) \leq \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(N)$.

Exercice 2 : (Norme subordonnée à la norme euclidienne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

On note $\|\cdot\|_2$ la norme (sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) subordonnée à la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ (notée $\|\cdot\|$).
Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$, où $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \rho(M) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\}$.

Colle 6

Exercice 1 :

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda n$ telles que $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda n$.

a) Montrer que pour tout $X\mathbb{R}^n$, $\lambda_1\|X\|^2 \leq^t XAX \leq \lambda_n\|X\|^2$.

b) En déduire que : $\lambda_1 = \min\limits_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{\|X\|^2}$ et $\lambda_n = \max\limits_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{\|X\|^2}$.

Exercice 2 : (Décomposition polaire)

a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, monter qu'il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A$.

b) Soit alors $M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un unique couple $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ tel que $M = \Omega S$.

Colle 7

Exercice 1 :

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint. Montrer qu'alors il existe une base de vecteur propre pour f et que de plus ses valeurs propres sont réelles.

Colle 8

Exercice 1 :

Soit E un espace euclidien et f et g deux endomorphismes autoadjoints qui commutent. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une base commune de vecteurs propres orthonormés.

Colle 9

Exercice 1 :

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie. Montrer qu'il existe une base orthonormale B de E dans laquelle la matrice de u a la forme par blocs

$$\mathrm{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix},$$

où pour tout j, $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ et pour tout i,

$$R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

avec $\theta_i \in \mathbb{R},\ \theta_i \neq 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.