Colle 1

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Redémontrer le résultat bien connu suivant : E est isomorphe à son dual E^*. Expliciter un isomorphisme $\varphi : E \to E^*$.

Exercice 2 :

Calculer $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \, \mathrm{d}t$

Colle 2

Exercice 1 :

Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ a une structure de groupe. Est-il connexe ?

Exercice 2 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée (norme de Schur).

b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme direct est orthogonale.

c) Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, monter que $\mathrm{d}(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|A -^t A\|$. Déterminer de même $\mathrm{d}(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

d) Calculer $\mathrm{d}(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ dans le cas où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Colle 3

Exercice 1 :

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Montrer que si F est un sous espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

Exercice 2 :

Caractériser l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Colle 4

Exercice 1 :

On considère une fonction ρ continue et strictement positive sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on suppose que l'on peut définir un produit scalaire sur E par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_I P(t)Q(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t \text{ pour tout couple}(P, Q) \text{ de polynômes.}$$

On suppose que l'on dispose d'une famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonaux pour ce produit scalaire et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\deg P_n = n$.

Le but de cet exercice est de retrouver quelques propriétés usuelles de cette famille.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

b) Prouver que $\langle XP, Q\rangle = \langle P, XQ\rangle$.

c) Établir l'existence de réels a_n, b_n, c_n tels que :

$$XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}.$$

d) Démonter que chaque polynôme P_n est scindé à racines simples dans I.

Colle 5

Exercice 1 :

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sev de E.

1/ Pour tout $x \in E$, on note $F_x = \{y \in F, \|x-y\| = \mathrm{d}(x,F) = \inf\limits_{z \in F} \|x-z\|\}$.

a) Soit $y \in F$. Montrer que $y \in F_x$ si et seulement si $x - y \in F^\perp$.

b) Montrer que F_x a au plus un élément.

2/ On suppose ici que F est complet.

a) Pour tout $x \in E$, montrer que F_x a exactement un élément. On le note x_F.

b) Montrer que $E = F \oplus F^\perp$ et que $x \mapsto P_F(x) = x_F$ s'identifie à la projection orthogonale sur F.

c) Montrer que $F = (F^\perp)^\perp$.

3/ On considère ici $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Que représente $F^\perp$? Conclure.

Colle 6

Exercice 1 :

Soit I un intervalle réel non réduit à un singleton, et $w : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement positive sur I. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n w(x)$ est intégrable sur I. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $x \mapsto f^2(x)w(x)$ est intégrable sur I. On notera que les fonctions polynômes appartiennent à $\mathcal{C}$ d'après l'hypothèse sur w.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel, et que

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

b) Pour cette structure, montrer qu'il existe une unique base (P_n) de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, orthonormale pour ce produit scalaire, et vérifiant $\deg P_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que le coefficient dominant γ_n de P_n est positif. (Les P_n sont appelés polynômes orthogonaux associés à la fonction poids w).

Questions

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse.

Soit E un espace espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme f un endomorphisme orthogonal si et seulement si l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale de E.

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse.

Soit E un espace préhilbertien et $f : E \to E$. f un endomorphisme orthogonal de E si et seulement si f préserve le produit scalaire.

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse.

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme f est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base quelconque de E est symétrique.