Colle 1

Exercice 1 :

Montrer que l'application suivante $q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{tr}({}^tAA) + (\mathrm{tr}A)^2$ est une forme quadratique définie positive.

Exercice 2 :

Montrer qu'un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Colle 2

Exercice 1 :

Montrer que l'application suivante $q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto (\mathrm{tr}A)^2$ est une forme quadratique. Est-elle positive ? Non dégénérée ?

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$ algèbre normée (on rappelle qu'il s'agit d'une algèbre munie d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. On la suppose unitaire (on note 1 l'élément unité) et complète.

a) Si $x \in \mathcal{A}$ vérifie $\|x\| < 1$ montrer que $1 - x$ est inversible dans $\mathcal{A}$.

b) Montrer que l'ensemble des inversibles de $\mathcal{A}$ est un ouvert de $\mathcal{A}$.

c) Soit $\varphi \to \mathbb{R}$ un morphisme d'algèbre. Montrer que φ est continu.

d) Application : Soit E un $\mathbb{R}$ espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ (ensemble des endomorphismes continus de E). On appelle spectre de u l'ensemble des réels λ tels que $u - \lambda\mathrm{Id} \notin \mathcal{G}l_c(E)$ (ensemble des endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ inversibles, d'inverse continu). Montrer que le spectre de u est compact.

Colle 3

Exercice 1 :

Montrer que l'application suivante $q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{tr}({}^tAA)$ est une forme quadratique. Est-elle positive ? Non dégénérée ?

Exercice 2 :

On définit l'application exp : $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array} \right.$

a) Montrer que cette application est bien définie.

b) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.

c) Monter que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

d) Montrer que l'exponentielle est continue.

Colle 4

Exercice 1 :

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques). Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et Φ une forme quadratique sur E. Si Φ est définie, montrer que Φ est soit positive, soit négative.

Colle 5

Exercice 1 :

Soit Φ une forme quadratique sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé E. Montrer que si Φ est définie, alors Φ est non dégénérée. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 : (Inégalité de Schwarz et inégalité de Minkowsky)

a) Redémontrer les résultats bien connus suivants :

Soit Φ une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. On note φ sa forme polaire associée et suppose Φ positive. Alors

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |\varphi(x,y)|^2 \leq \Phi(x)\Phi(y).$$

Si de plus Φ est définie, il y a égalité si et seulement si x et y forment une famille liée.

b) En déduire que si Φ une forme quadratique positive sur un espace vectoriel réel, alors

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \sqrt{\Phi(x+y)} \leq \sqrt{\Phi(x)}\sqrt{\Phi(y)}$$

Colle 6

Exercice 1 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer l'égalité $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire considéré. Montrer que l'on a l'identité suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Réciproquement, soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé et vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Montrer que E est préhilbertien réel (c'est à dire que la norme est issue d'un produit scalaire).

Remarque : Ceci nous donne une caractérisation des normes euclidiennes. Cette identité est appelée identité du parallélogramme (ou encore de la médiane).