Colle 1

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A) = 1\}$. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $Sl_n(\mathbb{K})$. $SL_n(\mathbb{K})$ est-il compact ?

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme de la convergence uniforme N_∞ définie par $\forall f,\ N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que cet espace est complet.

Colle 2

Exercice 1 :

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t MM = M^tM = I_n\}$ est compact.

Exercice 2 :

Soit $l_\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé des suites à valeurs réelles et bornées muni de la norme N_∞ définie par $\forall u,\ N_\infty(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Montrer que cet espace est complet.

Colle 3

Exercice 1 :

On considère $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles. Montrer que
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t XSX \geq 0\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cet ensemble est-il compact ?

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que
$F = \{f \in \mathcal{L}(E), P(f) = 0\}$ est une partie complète dans $\mathcal{L}(E)$, muni de la norme subordonnée.

Colle 4

Exercice 1 :

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On suppose que A est un ensemble compact et B un ensemble fermé. Montrer que l'ensemble $A+B$ défini par
$A+B=\{a+b,\ (a,b)\in A\times B\}$ est un fermé de E. Le résultat reste-il vrai si A est seulement supposé fermé ?

Exercice 2 :

Soit (E,d) un espace métrique complet et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(F_n)=0$ (où $\delta(F_n)$ désigne le diamètre de F_n). Montrer qu'alors il existe $x\in E$ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n=\{x\}$.

Remarque : On rappelle que pour (E,d) un espace métrique et $A\subset E$, $A\neq\emptyset$, on appelle diamètre de A l'élément de $[0,+\infty]$ défini par $\delta(A)=\sup\limits_{(x,y)\in A^2} d(x,y)$.

Colle 5

Exercice 1 :

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E et f une application de K dans K telle que $\forall(x,y)\in K^2,(x\neq y)\Rightarrow\ (\|f(x)-f(y)\|<\|x-y\|)$. Montrer que f admet un unique point fixe dans K (c'est à dire qu'il existe un unique x dans K tel que $f(x)=x$).

Exercice 2 :

Montrer qu'un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Colle 6

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que la boule unité fermée de E est compacte. Montrer que E est complet.

Remarque : On a un résultat plus précis connu sous le nom de théorème de Riesz : "Soit E un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie $\Leftrightarrow$ la boule unité fermé de E est compacte".

Exercice 2 :

Soit (E,d) un espace métrique complet, et $f:E\to E$ une application contractante (c'est à dire telle qu'il existe $k\in]0,1[,\ \forall(x,y)\in E^2,\ d(f(x),f(y))\leq kd(x,y)$). Montrer qu'alors f admet un unique point fixe (c'est à dire qu'il existe un unique $x\in E$ tel que $f(x)=x$).

Colle 7

Exercice 1 :

Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exp(P^{-1}MP) = P^{-1}\exp(M)P$.

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$ algèbre normée (on rappelle qu'il s'agit d'une algèbre munie d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. On la suppose unitaire (on note 1 l'élément unité) et complète.

a) Si $x \in \mathcal{A}$ vérifie $\|x\| < 1$ montrer que $1 - x$ est inversible dans $\mathcal{A}$.

b) Montrer que l'ensemble des inversibles de $\mathcal{A}$ est un ouvert de $\mathcal{A}$.

c) Soit $\varphi \to \mathbb{R}$ un morphisme d'algèbre. Montrer que φ est continu.

d) Application : Soit E un $\mathbb{R}$ espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ (ensemble des endomorphismes continus de E). On appelle spectre de u l'ensemble des réels λ tels que $u - \lambda\mathrm{Id} \notin \mathcal{G}l_c(E)$ (ensemble des endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ inversibles, d'inverse continu). Montrer que le spectre de u est compact.

Colle 8

Exercice 1 :

On définit l'application $\left\{\begin{array}{rcl} \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array}\right.$

a) Montrer que cette application est bien définie.

b) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.

c) Monter que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

d) Montrer que l'exponentielle est continue.

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F)$ (ensemble des applications linéaires continues de E dans F) muni de la norme subordonnée, est un espace de Banach.

Colle 9

Exercice 1 :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Montrer que $e^A \times e^B = e^{A+B}$. Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus que A et B commutent ?

Exercice 2 :

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. On munit cet ensemble de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\forall f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, $\|f\| = \sup\limits_{x \in X}|f(x)|$. Montrer que cela définit un espace de Banach.

Questions

Une union quelconque de fermés est toujours fermée ?

Une intersection quelconque d'ouverts est un ouvert ?

Toute application lipschitzienne est uniformément continue ?

Toute norme est une application continue ?

Le déterminant est une application continue ?

La multiplication matricielle est continue ?

Le produit scalaire est une application continue ?

L'image d'un ouvert par une application continue est un ouvert ?

L'image réciproque d'un fermé est toujours fermé ?

Tout compact est fermé et borné ?

Dans un compact, de toute suite bornée on peut extraire une sous suite convergente.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont exactement les ensembles fermés et bornés ?

L'image réciproque de tout compact par une application continue est un compact ?

L'image d'un compact par une application continue est un compact ?

L'image réciproque de tout compact par une application continue est un compact ?

Toute fonction définie sur un compact non vide à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes ?

Toute fonction continue sur un compact est uniforément continue ?

Toute fonction continue et bornée est uniformément continue ?

Un espace compact est complet ?

Toute suite convergente et de Cauchy ?

Toute suite de Cauchy est bornée ?

Tout suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence ?

Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge ?

Dans un espace vectoriel normé quelconque, toute série absolument convergente est convergente ?

Tout espace vectoriel de dimension finie est complet ?

Les parties complètes d'un espace complet sont exactement les parties fermées ?

$\mathbb{Q}$ est complet ?

L'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles continues et 2π périodiques $\mathcal{C}_{2\pi}$ munit du produit scalaire usuel $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est-il complet ?

En dimension finie toutes les normes sont équivalentes ?

En dimension finie toute application linéaire est continue ?

La série exponentielle est bien définie sur toute algèbre de dimension finie ?