Colle 1 — ECAM2

Exercice 1 :

Étudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(nx) \end{array} \right. , I = \mathbb{R}, I = [a, +\infty[\text{ avec } a > 0.$$

Exercice 2 :

a) Calculer la longueur de l'astroïde : $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & a\cos^3(t) \\ y(t) & = & a\sin^3(t) \end{array} \right.$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

b) Construire l'arc paramétré défini par : $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & 5\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) & = & t\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right.$.

Colle 2 — ECAM2

Exercice 1 :

Étudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{nx^2e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2} \end{array} \right. , I = \mathbb{R}^*, I = \mathbb{R}_+^*, I = [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 2 :

a) Calculer la longueur de la cardioïde : $\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

b) Étude et tracé de la lemniscate de Bernoulli définie par : $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) & = & \frac{t^3}{1+t^4} \end{array} \right.$.

Colle 3 — ECAM2

Exercice 1 :

Étudier la convergence simple et uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$f_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{array} \right. , \alpha \in \mathbb{R}^+, I = \mathbb{R}^+, I = [a, +\infty[\text{ avec } a > 0.$$

Exercice 2 :

a) Calculer la longueur de la courbe paramétrée définie par : $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & 3 - 2\cos(t) - 2\cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) - \sin(2t) \end{array} \right.$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Construire l'arc paramétré défini en coordonnée polaires par : $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Colle 4 ECAM2

Exercice 1 :

Étude et tracé de la courbe définie en coordonnées polaires par $\rho(\theta) = \cos(2\theta)$.

Exercice 2 : Théorème de Dini :

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, montrer que la convergence est uniforme.

Colle 5 ECAM2

Exercice 1 :

Étude et tracé de la courbe définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & a\cos^3(t) \\ y(t) & = & a\sin^3(t) \end{array} \right.$.

Exercice 2 :

Soit (f_n) une suite de fonctions d'un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que toutes les fonctions f_n soient K lipschitziennes. Si (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, monter que la convergence est uniforme.

Colle 6 ECAM2

Exercice 1 :

Étude et tracé de la courbe définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \sin(t) \\ y(t) & = & \sin(2t) \end{array} \right.$.

Exercice 2 :

Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes (P_n) ?