Colle 1

Exercice 1 :

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 x^{x^n}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

Soit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, munit de la norme de la convergence uniforme ($\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$).
L'application $\varphi : f\in E\mapsto \varphi(f)=\exp\circ f$, est-elle continue sur E ? Est-elle linéaire ?

Colle 2

Exercice 1 :

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé et $\varphi : E\to\mathbb{R}$ une forme linéaire. Montrer que φ est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}\varphi$ est un fermé de E.

Colle 3

Exercice 1 :

Justifier l'existence de $I_n=\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, puis montrer que
$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie et $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que
$F=\{f\in\mathcal{L}(E), P(f)=0\}$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$, muni de la norme subordonnée.

Colle 4

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel. On suppose que F est d'intérieur non vide. Montrer que $F = E$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un point adhérent de $GL_n(\mathbb{R})$, autrement dit que $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer ensuite que pour toute matrice A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Colle 5

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel normé, Ω un ouvert de E et A une partie quelconque de E. Montrer que $\Omega + A = \{\omega + a,\ (\omega, a) \in \Omega \times A\}$ est un ouvert de E.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A) = 1\}$. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $Sl_n(\mathbb{K})$.

Colle 6

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel normé, A et B deux fermés de E. L'ensemble $A + B$ défini par $A + B = \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\}$ est-il nécessairement un fermé de E ?

Exercice 2 :

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),^t MM = M^tM = I_n\}$ est fermé et borné et que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n,^t XSX \geq 0\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles.

Colle 7

Exercice 1 :

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à valeurs propres distinctes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire :

a) Une autre démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

b) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \dim \mathcal{C}(A) \geq n$, où $\mathcal{C}(A)$ désigne le commutant de la matrice A, c'est à dire l'ensemble défini par $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AB = BA\}$.

Colle 8

Exercice 1 :

On définit l'application $\left\{ \begin{array}{rcl} \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} \end{array} \right.$

a) Montrer que cette application est bien définie.

b) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.

c) Monter que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

d) Montrer que l'exponentielle est continue.

Colle 9

Exercice 1 :

Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ des matrices trigonalisables est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables et $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'adhérence de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$.

Colle 10

Exercice 1 :

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{D})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Quel est l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{D})$?

Colle 11

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Gamma = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists p \in \mathbb{N}^*, M^p = I_n\}$. Déterminer l'adhérence de Γ.

Questions

Une union quelconque de fermés est toujours fermée ?

Une intersection quelconque d'ouverts est un ouvert ?

Toute application lipschitzienne est continue ?

Toute norme est une application continue ?

Le déterminant est une application continue ?

La multiplication matricielle est continue ?

L'image d'un ouvert par une application continue est un ouvert ?

L'image réciproque d'un fermé est toujours fermé ?

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont exactement les ensembles fermés et bornés ?

L'image réciproque de tout compact par une application continue est un compact ?

L'image d'un compact par une application continue est un compact ?

L'image réciproque de tout compact par une application continue est un compact ?