

Colle 1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse et proposer une rectification possible pour que celle-ci soit vraie dans le cas où elle ne serait pas vérifiée.

L'image d'un ouvert par une application continue est un ouvert.

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un point adhérent de $GL_n(\mathbb{R})$, autrement dit que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer ensuite que pour toute matrice A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Colle 2

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse, et proposer une rectification possible pour que celle-ci soit vraie dans le cas où elle ne serait pas vérifiée.

L'image réciproque d'un fermé est toujours fermé.

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A) = 1\}$. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $SL_n(\mathbb{K})$.

Colle 3

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont exactement les ensembles fermés et bornés.

Exercice 1 :

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tMM = M^tM = I_n\}$ est compact et que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXSX \geq 0\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles.

Colle 4

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Toute application lipschitzienne est continue.

Exercice 1 :

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, munit de la norme de la convergence uniforme ($\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$).

L'application $\varphi : f \in E \mapsto \varphi(f) = \exp \circ f$, est-elle continue sur E ? Est-elle linéaire ?

Colle 5

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Toute norme est une application continue.

Exercice 1 :

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel normé et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Montrer que φ est continue si et seulement si $\text{Ker}\varphi$ est un fermé de E .

Colle 6

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Exercice 1 :

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{L}(E), P(f) = 0\}$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$, munit de la norme subordonnée.

Colle 7

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse, et proposer une rectification possible pour que celle-ci soit vraie dans le cas où elle ne serait pas vérifiée.

Une intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.

Exercice 1 :

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à valeurs propres distinctes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire :

a) Une autre démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

b) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \dim \mathcal{C}(A) \geq n$, où $\mathcal{C}(A)$ désigne le commutant de la matrice A , c'est à dire l'ensemble défini par $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AB = BA\}$.

Colle 8

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse, et proposer une rectification possible pour que celle-ci soit vraie dans le cas où elle ne serait pas vérifiée.

Une union quelconque de fermés est toujours fermée.

Exercice 1 :

On définit l'application
$$\begin{cases} \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} \end{cases}$$

- a) Montrer que cette application est bien définie.
- b) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A .
- c) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$.
- d) Montrer que l'exponentielle est continue.

Colle 9

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse et proposer une rectification possible pour que celle-ci soit vraie dans le cas où elle ne serait pas vérifiée.

L'image réciproque de tout compact par une application continue est un compact.

Exercice 1 :

Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ des matrices trigonalisables est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables et $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'adhérence de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{C}_n(\mathbb{R})$.

Colle 10

Question de cours : Le déterminant est une application continue.

L'image réciproque de tout compact par une application continue est un compact.

Exercice 1 :

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Quel est l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$?

Colle 11

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse.

La multiplication matricielle est continue.

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Gamma = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists p \in \mathbb{N}^*, M^p = I_n\}$. Déterminer l'adhérence de Γ .