Colle 1

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Soit E et F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie. Alors toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est lipschitzienne.

Exercice 1 :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, on pose : $\|P\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)|$. Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E.

Exercice 2 :

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ et $f : x \in E \mapsto d(x, A)$, où $d(x, A) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\}$. Montrer que f est lipschitzienne sur E.

Colle 2

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

Toute application linéaire est lipschitzienne.

Exercice 1 :

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose : $N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t}$. Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 2 :

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, munit de la norme de la convergence uniforme ($\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$), et l'application $L : f \in E \mapsto L(f)$, où $L(f)$ est définie par $L(f) : x \mapsto \int_0^1 (x+t)f(t) \, \mathrm{d}t$. L est-elle linéaire ? Lipschitzienne ? Si oui calculer sa norme.

Colle 3

Question de cours : Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse :

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 1 :

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, avec $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, on pose : $\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $\|P\|_\infty = \max\limits_{0 \leq k \leq n} |a_k|$, et $\|P\| = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|$. Montrer que ce sont des normes sur E, non équivalentes.

Exercice 2 :

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, munit de la norme de la convergence uniforme ($\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$), et l'application $\varphi : f \in E \mapsto \varphi(f)$, où $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$. φ est-elle linéaire ? Lipschitzienne ? Si oui calculer sa norme.

Colle 4

Question de cours : L'application N définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par $N(A) = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$ est-elle une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$? Si oui, est-ce une norme euclidienne ?

Remarque : Via une correspondance canonique, on voit qu'il s'agit en fait de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{np}$.

Exercice 1 :

Déterminer, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la norme subordonnée à la norme $\| \ \|_1$ de $\mathbb{C}^n$ ($\|X\|_1 = \|(x_1, ..., x_n)\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$).

Exercice 2 :

On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et on note $\|P\|$ la norme associée.

a) Vérifier rapidement qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

b) Étudier le caractère lipschitzien de l'application : $P \to P(0)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire qu'il n'existe pas de polynôme Q tel que pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, $P(0) = \langle P, Q\rangle$.

Colle 5

Question de cours : On se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $\rho(A)$ le plus grand module des valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de la matrice A (on appelle rayon spectral). L'application N définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par $N(A) = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ est-elle une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$?

Remarque : Il s'agit en fait de la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*, E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(a)$. Monter que f est lipschitzienne. Déterminer les normes de f subordonnées aux normes N_1 et N_∞ (Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k, N_1(P) = \sum_{k=0}^n |\alpha_k|$ et $N_\infty(P) = \sup\limits_{0 \leq k \leq n} |\alpha_k|$).

Exercice 2 :

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel normé E tels que : $fg - gf = \mathrm{Id}$.

a) Calculer pour tout entier n, $fg^n - gf^n$.

b) Montrer que f et g ne sont pas simultanément lipschitziennes.

Colle 6

Question de cours : On rappelle qu'une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une norme $\| \ \|$ vérifiant $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle une norme matricielle ?

Exercice 1 :

Soit $l_\infty(\mathbb{R}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M\}$ l'espace vectoriel des suites bornées. On définit aussi $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty(\mathbb{R}), u_0 = 0\}$. Pour $u \in l_\infty(\mathbb{R})$, on note : $N_\infty(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, et, pour $u \in E$: $N(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

a) Montrer que N_∞ est une norme sur $l_\infty(\mathbb{R})$ et N une norme sur E.

b) Comparer les normes N_∞ et N sur E.

Exercice 2 :

Soit E une espace vectoriel normé réel de dimension finie, et soit φ une forme linéaire non nulle de E. Monter que $\forall x \in E, d(x, \mathrm{Ker}(\varphi)) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$, où $\| \ \varphi\|$ désigne la norme subordonnée à la norme de E et à la valeur absolue de $\mathbb{R}$.