Colle 1 ECAM 2

**Question de cours :** Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse, et proposer une rectification possible pour que celle-ci soit vraie dans le cas où elle ne serait pas vérifiée.

L'image réciproque d'un fermé est toujours fermé.

**Exercice 1 :**

Soit $f$ un difféomorphisme croissant de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Démontrer l'égalité $\sum_{k=1}^{n}\left[f^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)-f^{-1}\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]=1$, puis montrer qu'il existe une suite finie strictement croissante $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ telle que : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_k)}=n$.

**Exercice 2 :**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un point adhérent de $GL_n(\mathbb{R})$.

Colle 2 ECAM 2

**Question de cours :** Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse et proposer une rectification possible pour que celle-ci soit vraie dans le cas où elle ne serait pas vérifiée.

L'image d'un ouvert par une application continue est un ouvert.

**Exercice 1 :**

Calculer la dérivée d'ordre $n$ de la fonction $f_n : x \mapsto x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$.

**Exercice 2 :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A) = 1\}$. Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $Sl_n(\mathbb{K})$.

Colle 3 ECAM 2

**Question de cours :** Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse et proposer une rectification possible pour que celle-ci soit vraie dans le cas où elle ne serait pas vérifiée.

L'image réciproque de tout compact par une application continue est un compact.

**Exercice 1 :**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \geq 2$. On suppose qu'il existe des réels $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \geq b$, tels que $f(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

a) Montrer que $\forall x \in [a, b], \exists u \in [a, b],\ f(x) = \frac{f^{(n)}(u)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$.

b) Soit $M = \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n)}(t)|$. Montrer que $\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leq \frac{M}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|$.

c) Montrer que $\forall i \in \{1, ..., n\},\ |f'(x_i)| \leq \frac{M}{n!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |x - x_j|$.

**Exercice 2 :**

Soit $E$ un espace vectoriel normé réel de dimension finie et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{L}(E), P(f) = 0\}$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$, munit de la norme subordonnée.