Colle 1 ECAM 2

Question de cours : Énoncer le Théorème du rang.

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel.
a) Soient f et g deux applications linéaires de E dans F. Montrer les inégalités
$\big|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)\big| \leq \text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.
b) Soient deux endomorphismes $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $fg = 0$ et $f+g$ inversible. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim E$.

Exercice 2 : Calculer $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq 1\big\}$.

Colle 2 ECAM 2

Question de cours : Donner la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.
a) Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
b) Monter que si $p+q$ est un projecteur, $\text{Im}(p+q) = \text{Im}p \oplus \text{Im}q$ et $\text{Ker}(p+q) = \text{Ker}p \cap \text{Ker}q$.

Exercice 2 : Calculer $\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y \leq x\big\}$.

Colle 3 ECAM 2

Question de cours : Énoncer le Théorème de la base incomplète.

Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Monter l'équivalence $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}f \iff \text{Im}f = \text{Im}f^2$.
Cette équivalence reste-t-elle vraie en dimension infinie ?

Exercice 2 : Calculer $\iint_D (x^2 - y^2)e^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1, x+y \geq 1, x \geq y\big\}$.

Colle 4 ECAM 2

Question de cours : Donner la définition du rang d'une application linéaire.

Exercice 1 : Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, tels que $E = \text{Ker}f + \text{Ker}g = \text{Im}f + \text{Im}g$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 2 : Calculer $\iint_D x\cos(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq \pi^2\big\}$.

Colle 5 ECAM 2

Question de cours : Deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$, vrai ou faux ?

Exercice 1 : Monter que l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels et l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées antisymétriques d'ordre n à coefficients réels sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Donner une base de chacun de ces sous-espaces et rappeler leur dimension.

Exercice 2 : Calculer $\iint_D \frac{1}{x+y+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\right\}$.

Colle 6 ECAM 2

Question de cours : Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 : Soit E un espace $\mathbb{K}$ vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) $\varphi_1, ..., \varphi_p \in E^*$ et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}^p$ définie par $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_p)$. Montrer que φ est surjective si et seulement si les éléments $\varphi_1, ..., \varphi_p$ sont linéairement indépendants.

Exercice 2 : Calculer $\iint_D \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$, et où $(a, b, R) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ fixé.

Colle 7 ECAM 2

Question de cours : Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

Exercice 1 : Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) contient au moins une matrice inversible.

Exercice 2 : Calculer $\iint_D e^{-(x^2+xy+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + xy + y^2 \leq 1\right\}$.

Colle 8 ECAM 2

Question de cours : Tout sous espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie, vrai ou faux ?

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On considère un entier $1 \leq p \leq n$ et p formes linéaires indépendantes $e_1^*, e_2^*, ..., e_p^*$ de noyaux respectifs $H_1, H_2, ..., H_p$. Montrer que : $\cup_{k=1}^p H_k \neq E$.

Exercice 2 : Calculer $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.