Colle 1

Exercice 1 :

Soit A une algèbre normé de dimension finie ayant e pour élément unité.

1) Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

a) Démontrez que la série $\sum u^n$ est convergente.

b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2) Démontrez que, pour tout u de A, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

Exercice 2 :

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour tout entier naturel n, on note $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Déterminer la limite de la suite (I_n).

b) Quelle est la limite de la suite (nI_n) ? En déduire un équivalent de I_n si $f(1) \neq 0$.

c) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+x))^n\,\mathrm{d}x$. Déterminer un équivalent de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Colle 2

Exercice 1 :

Étudiez la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \leq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$? $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$?

Colle 3

Exercice 1 :

Soit $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, \mathrm{d}t$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F.

b) Étudier la continuité de F sur son ensemble de définition.

c) Étudier la dérivabilité de F sur son ensemble de définition.

d) Calculer la valeur de F.

Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle (E) $xy' + \ln(1-x)y = 0$.

1) Montrer que (E) admet une unique solution f sur $]-\infty, 1[$ vérifiant $f(0) = 1$.

2) Montrer que f est développable en série entière en 0.

Colle 4

Exercice 1 :

1) Démontrez que, dans un espace vectoriel normé complet, toute série absolument convergente est convergente.

2) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il complet ?

Exercice 2 :

1) Déterminer le domaine de définition D de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$.

2) f est-elle continue (respectivement dérivable) sur D ?

3) Étudier la limite de f en $+\infty$.

Colle 5

Exercice 1 :

Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos x$.

Exercice 2 :

Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n(n+2)}$, ainsi que sa somme.

Colle 6

Exercice 1 :

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, n désignant le degré de P, on pose :

$$p_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \text{ et } p_2(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

1) a) Démontrez succinctement que p_1 et p_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Démontrer que tout ouvert pour la norme p_2 est un ouvert pour la norme p_1.

c) Démontrer que les normes p_1 et p_2 ne sont pas équivalentes.

2) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égale à k. On note p'_1 la restriction de p_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et p'_2 la restriction de p_2 à $\mathbb{R}_k[X]$.
Les normes p'_1 et p'_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 2 :

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t MM = M^t M = I_n\}$ est compact. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il munit d'une structure naturelle de groupe ?