Colle 1

**Exercice 1 :**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que $A$ est diagonalisable de quatre manières :

a) sans calculs,

b) en calculant directement le déterminant $\det(A - \lambda I_3)$, où $I_3$ est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

c) en utilisant le théorème du rang,

d) en calculant $A^2$.

2) On suppose que $A$ est la matrice d'un endomorphisme $u$ d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

a) Que peut-on dire de l'endomorphisme $u$ ?

b) Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale.

**Exercice 2 :**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique égale à $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de $f$. En déduire les valeurs de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Colle 2

**Exercice 1 :**

On pose, pour tout $x$ de $]0,+\infty[$ et pour tout $t$ de $[0,+\infty[$ :

$$f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}.$$

1) Démontrez que la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose, pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

2) Démontrez que, pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3) Démontrez que $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimez $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

**Exercice 2 :**

Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

a) Montrer rapidement que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée (norme de Schur).

b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme direct est orthogonale.

c) Si $M$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, monter que $\mathrm{d}(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|M -^t M\|$. Déterminer de même $\mathrm{d}(M, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Colle 3

**Exercice 1 :**

Résoudre l'équation différentielle suivante : $x(1-x)y' + y = x$.

**Exercice 2 :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un point adhérent de $GL_n(\mathbb{R})$, autrement dit que $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer ensuite que pour toute matrice $A, B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Colle 4

**Exercice 1 :**

1) Démontrez que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2) Pour chaque nombre $r > 0$, on note $C_r$ le carré $[0, r] \times [0, r]$, et $D_r$ l'ensemble défini par $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq r^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

a) Quelle relation y a-t-il entre $\displaystyle\iint_{C_r} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_0^r e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ?

b) Calculez en fonction de $r$ l'intégrale double $\displaystyle\iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

c) Déduisez de ce qui précède la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

*Indication* : On pourra remarquer que $D_r \subset C_r \subset D_{2r}$.

**Exercice 2 :**

On définit l'application $\left\{\begin{array}{rcl} \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array}\right.$

a) Montrer que cette application est bien définie.

b) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A)$ est un polynôme en $A$.

c) Monter que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

d) Montrer que l'exponentielle est continue.

Colle 5

---

**Exercice 1 :**

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, munit de la norme de la convergence uniforme

$$p_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

1) On considère l'application $L : f \in E \mapsto L(f)$, où $L(f)$ est définie par

$$L(f) : [0,1] \ni x \mapsto \int_0^1 (x+t) f(t) \, \mathrm{d}t.$$

$L$ est-elle un endomorphisme continue de $E$ ? Est-elle lipschitzienne ? Calculer sa norme.

2) On considère désormais la norme

$$p_1(f) = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

a) Démontrer que tout ouvert pour la norme $p_1$ est un ouvert pour la norme $p_\infty$.

b) Les normes $p_1$ et $p_\infty$ sont-elles équivalentes ?

**Exercice 2 :**

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$.

Colle 6

**Exercice 1 :**

On considère la série de fonction $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$, $x$ désignant un réel.

1) Étudiez la simple convergence de cette série.

On note $D$ l'ensemble des $x$ où cette série converge, et $S(x)$ la somme de cette série.

2) a) Etudiez la convergence normale puis la convergence uniforme de cette série sur $D$.

b) La fonction $S$ est-elle continue sur $D$ ?

**Exercice 2 :**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Monter l'équivalence

$$E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longleftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2.$$

Cette équivalence reste-t-elle vraie en dimension infinie ?